Universidad Nacional Autónoma de México **Facultad de Ciencias**

Cálculo Diferencial e Integral I 2020-1
Profra: Dra. Judith Campos Cordero Ayudantes: Jonathan Giovanni Gil Juárez
. Manuel Alejandro Zúñiga Pérez

Axiomas de los números reales

Propiedades algebraicas de los reales.

Suponemos que existen funciones

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

llamada suma y

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

llamada multiplicación, tales que junto con el conjunto $\mathbb{R}$, satisfacen los siguientes

Axiomas algebraicos

(S1) Conmutatividad de la suma: $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a + b = b + a$.

(S2) Asociatividad de la suma: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $a + (b + c) = (a + b) + c$.

(S3) Existencia del neutro aditivo: $\exists 0 \in \mathbb{R}\ \forall a \in \mathbb{R}\ a + 0 = a$.

(S4) Existencia de inversos aditivos: $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists -a \in \mathbb{R}\ a + (-a) = 0$.

(M1) Conmutatividad de la multiplicación: $\forall a, b \in \mathbb{R}\ a \cdot b = b \cdot a$.

(M2) Asociatividad de la multiplicación: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

(M3) Existencia del neutro multiplicativo: $\exists 1 \in \mathbb{R}\ \forall a \in \mathbb{R}\ a \cdot 1 = a$.

(M4) Existencia de inversos multiplicativos: $\forall a \in \mathbb{R}\ [a \neq 0 \Rightarrow \exists a^{-1} \in \mathbb{R}\ (a \cdot a^{-1} = 1)]$.

(D) Distributividad: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

(Z) Axioma para evitar el colapso: $0 \neq 1$, donde 0 es el elemento que existe en $\mathbb{R}$ según el axioma (S3) y 1 es el elemento en $\mathbb{R}$ que existe según (M3).

Notación. Acordamos lo siguiente:

- ab significa lo mismo que $a \cdot b$;
- $a - b$ significa lo mismo que $a + (-b)$;
- $\frac{1}{a}$ significa lo mismo que a^{-1}, para $a \neq 0$;
- $\frac{a}{b}$ significa lo mismo que $a\frac{1}{b}$, para $b \neq 0$.

Axiomas del orden

Existe un conjunto $\mathbb{P}$, llamado el **conjunto de los números positivos**, tal que $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{R}$ y que satisface las siguientes propiedades:

(P1) $\mathbb{P}$ es cerrado bajo la suma, es decir, si $a, b \in \mathbb{P}$, entonces $a + b \in \mathbb{P}$.

(P2) $\mathbb{P}$ es cerrado bajo la multiplicación, es decir, si $a, b \in \mathbb{P}$, entonces $ab \in \mathbb{P}$.

(P3) Tricotomía: Para todo $a \in \mathbb{R}$ ocurre una y sólo una de las siguientes condiciones: $a \in \mathbb{P}$, $a = 0$ ó $-a \in \mathbb{P}$.

Notación. Acordamos lo siguiente:

- $a < b$ significa lo mismo que $b - a \in \mathbb{P}$;
- $a > b$ significa lo mismo que $a - b \in \mathbb{P}$;
- $a \leq b$ significa lo mismo que $(a < b \vee a = b)$;
- $a \geq b$ significa lo mismo que $(a > b \vee a = b)$.

Axioma de completitud

Definición: *Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto y $b \in \mathbb{R}$ tiene la propiedad de que $\forall a \in A(a \leq b)$, entonces decimos que A es un conjunto acotado superiormente y que b es una cota superior para A.*
Definición (de supremo): *Dado un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ y un número $\alpha \in \mathbb{R}$, decimos que α es el **supremo** de A si y sólo si:*

- *α es cota superior para A y*
- *α es la mínima cota superior para A, es decir, si $b \in \mathbb{R}$ es cota superior para A, entonces $\alpha \leq b$.*

Notación. Escribimos $\sup A$ para denotar al supremo de A.

Axioma del supremo

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Si $A \neq \emptyset$ y A está acotado superiormente, entonces existe el supremo de A y $\sup A \in \mathbb{R}$.