Universidad Nacional Autónoma de México **Facultad de Ciencias**

Cálculo Diferencial e Integral I 2020-1
Profra: Dra. Judith Campos Cordero Ayudantes: Jonathan Giovanni Gil Juárez
. Manuel Alejandro Zúñiga Pérez

Sucesiones y convergencia

Notas basadas ampliamente en las notas del Prof. H.A. Priestley

1. Sucesiones

1.1. Aproximación de números reales

Ejemplos 1.1. (a) $\frac{3}{10}, \frac{33}{100}, \frac{333}{1000}, \ldots, \frac{33..,3}{10^n}$ son aproximaciones cada vez mejores del número $\frac{1}{3}$.

(b) (Una visita de regreso a la *propiedad arquimedeana*). La propiedad arquimedeana nos dice que para toda $\varepsilon > 0$ existe una $N \geq 1$ tal que $0 < 1/N < \varepsilon$. Esto significa que $0 < 1/n < 1/N < \varepsilon$ siempre que $n > N$. Una manera de interpretar esto es que, **salvo por una cantidad finita** de términos al principio, los términos de la sucesión

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

están todos a una distancia menor a ε del 0, y esto es válido para cualquier $\varepsilon > 0$ que demos, aunque, una vez que fijamos ε, **el número N que mencionamos arriba depende de esa ε.**

(c) La intuición nos dice que si consideramos la sucesión de números

$$1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \ldots$$

esta secuencia de números no muestra una tendencia, es decir, no está acercándose cada vez más a un número real específico.

1.2. La definición formal de sucesión

Oficialmente, una **sucesión de números reales**, también llamada **sucesión real**, es una función $\alpha \colon \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$,

$$n \mapsto \alpha(n).$$

Normalmente escribimos a_n para referirnos al término $\alpha(n)$, que es el *enésimo término de la sucesión*. Además, escribimos (a_n) ó $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ para referirnos a la sucesión α. Nótese que la sucesión está determinada por el *orden* que se le dio a los números reales en la imagen de la función α.

Ejemplos 1.2. (a) Sea $a_n = \alpha(n)$, donde $\alpha(n) = \sin n/(2n+1)$. Entonces, la sucesión se ve como

$$\left(\frac{1}{3}\sin 1, \frac{1}{5}\sin 2, \frac{1}{7}\sin 3, ...\right).$$

(b) Sea $a_n = \alpha(n)$, donde $\alpha(n) = (-1)^n$. Entonces la sucesión se ve como

$$(-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, ...).$$

1.3. Construcción de nuevas sucesiones.

Podemos formar sucesiones nuevas a partir de sucesiones ya dadas: si (a_n) y (b_n) son sucesiones, podemos considerar a las sucesiones $(a_n + b_n)$, $(-a_n)$, $(a_n b_n)$ y, en el caso en el que $b_n \neq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}^+$, podemos considerar a la sucesion (a_n/b_n). Además, si $c \in \mathbb{R}$ es una constante, podemos pensar en la sucesión (ca_n). También podemos pensar en la sucesión $(|a_n|)$.

Ejemplos 1.3. Sean $a_n = (-1)^n$ y $b_n = 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
(a_n + b_n) &= (1, 3, 1, 3, 1, 3, ...) \\
(-a_n) &= ((-1)^{n+1}) \\
(a_n b_n) &= (-2, 2, -2, 2, -2, 2, ...) \\
(a_n/b_n) &= (-1/2, 1/2, -1/2, 1/2, -1/2, ...) \\
(ca_n) &= (-c, c, -c, c, -c, c, ...) \\
(|a_n|) &= (1, 1, 1, 1, 1, ...).
\end{aligned}$$

Un concepto muy importante en el tema de sucesiones es el de **convergencia** de una sucesión (a_n). El propósito es analizar cómo se comportan los términos a_n de la sucesión cuando n se hace *arbitrariamente grande*. Específicamente, nos interesa averiguar si los términos de la sucesión se *acercan arbitrariamente a un valor* límite L. Requerimos formalizar estas ideas y las siguientes secciones están dedicas a eso.

1.4. Uso de ε para capturar la idea de *acercarse arbitrariamente.*

Recurriendo a lo mencionado al inicio de estas notas, un número x está a una distancia ε de un número a si y sólo si

$$|x - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x < a + \varepsilon. \tag{1.1}$$

La idea de acercarse arbitrariamente consistirá en pensar que $\varepsilon > 0$ se puede tomar tan pequeño como queramos.

Convergencia de una sucesión real

Definición 1.4. *Sea (a_n) una sucesión de números reales y sea $L \in \mathbb{R}$. Decimos que (a_n)* ***converge*** *a L si y sólo si*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N\, |a_n - L| < \varepsilon.$$

Notación: Escribimos $a_n \to L$ cuando $n \to \infty$ para decir que (a_n) converge a L.
En la definición de convergencia, N siempre dependerá de ε. Nótese también que podemos reemplazar $n \geq N$ por $n > N$ y/ó $|a_n - L| < \varepsilon$ por $|a_n - L| \leq \varepsilon$ en la definición anterior y obtenemos un enunciado equivalente. ¡Reflexionen acerca de esto y piensen en el porqué!. Sin embargo, en la definición es crucial decir que $\varepsilon > 0$, para que la noción de convergencia tenga algún sentido.

Definición 1.5. *Si una sucesión (a_n) es tal que $a_n \to L$, decimos que L es el* ***límite*** *de la sucesión. También escribimos*

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n \ \textit{y, a veces, simplemente } L = \lim a_n.$$

Decimos que (a_n) es ***convergente*** *si existe algún número $L \in \mathbb{R}$ tal que (a_n) converge a L. También decimos que (a_n) es* ***divergente*** *si no existe un número real al cual la sucesión converja.*

Ejemplos 1.6. Para acercarnos a entender cómo demostrar la convergencia de una sucesión directamente a partir de la definición:

(a) El hecho de que

$$1/n \to 0 \text{ cuando } n \to \infty$$

es simplemente la Propiedad Arquimedeana de los reales pero vista de otro modo. Para ver esto, notemos que la Propiedad Arquimedeana nos dice que, dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $1/N < \varepsilon$. Entonces, es claro que para toda $n \geq N$ tenemos que $|1/n - 0| = 1/n \leq 1/N < \varepsilon$. Esto es, $1/n$ converge a 0.

(b) Sea $a_n = 1 + (-1)^n \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Afirmamos que $a_n \to 1$ cuando $n \to \infty$. Tomemos $\varepsilon > 0$ arbitrario. **Buscamos** una N tal que para toda $n \geq N$, $|a_n - 1| < \varepsilon$. Observamos entonces que

$$\begin{aligned} |a_n - 1| = \left|(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}\right| < \varepsilon \quad \Leftarrow \quad & \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \\ \Leftarrow \quad & n \geq N, \text{ donde elegimos } N \in \mathbb{N} \text{ de tal manera que } N > \frac{1}{\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

Aquí, y en lo que sigue, entendemos a la flecha $\Leftarrow$ como un *"esto pasa si..."*

(c) Sea $a_n = \dfrac{1}{n^2 - n + 1}$. Tomemos $\varepsilon > 0$ arbitrario. Afirmamos que $a_n \to 0$. Para probarlo, podemos observar que:

$$\begin{aligned} |a_n - 0| = \left|\frac{1}{n^2 - n + 1}\right| = \frac{1}{n^2 - n + 1} < \varepsilon \quad \Leftarrow \quad & n^2 - n + 1 > \frac{1}{\varepsilon} \\ \Leftarrow \quad & \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 > \frac{1}{\varepsilon} - \frac{3}{4} \\ \Leftarrow \quad & n > N \text{ donde } N \in \mathbb{N} \text{ se toma de modo} \\ & \text{que } N \geq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - \frac{3}{4}}, \end{aligned}$$

donde podemos suponer, *sin perder generalidad*, que $\varepsilon < 4/3$ (ver nota al final de estos ejemplos).

(d) Sea $a_n = \dfrac{n\sin(n^2)}{3n^3 - n - 1}$. Afirmamos que (a_n) converge a 0 cuando $n \to \infty$. Para ver esto, tomemos $\varepsilon > 0$ arbitraria y observemos que:

$$\begin{aligned} |a_n - 0| = \frac{n|\sin(n^2)|}{|3n^3 - n - 1|} < \varepsilon \quad &\Leftarrow \quad \frac{n}{|3n^3 - n - 1|} < \varepsilon \qquad \text{pues } |\sin x| \leq 1\, \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Leftarrow \quad \frac{n}{3n^3 - n - 1} < \varepsilon. \end{aligned}$$

La última flecha $\Leftarrow$ es cierta pues, como $n \geq 1$, entonces $n^3 \geq n$ y $n^3 \geq 1$, así que $3n^3 - n - 1 > 0$ para toda $n \in \mathbb{N}^+$.

Notemos ahora que, usando nuevamente que $n^3 \geq n$ y $n^3 \geq 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{n}{3n^3 - n - 1} < \varepsilon \quad &\Leftarrow \quad \frac{n}{n^3} < \varepsilon \\ &\Leftarrow \quad n \geq N, \text{ donde } N > 1/\sqrt{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Esto prueba que $a_n \to 0$. Nótese la importancia de manejar correctamente las desigualdades en este ejemplo.

Nótese también la importancia enorme de distinguir entre una flecha $A \Leftarrow B$, que significa, “A pasa si B”, de una flecha $A \Rightarrow B$, que significaría “si pasa A, entonces pasa B”.

Nota importante: En el ejemplo (c) dijimos que sin perder generalidad podemos suponer que $\varepsilon < 4/3$. Esto se debe a que **la N que encontramos sirve para hacer que, para todas las** $\varepsilon < 4/3$, se cumpla que, si $n \geq N$, entonces $|a_n - L| < \varepsilon$. Por lo tanto, si alguien nos da una $\tilde{\varepsilon} \geq 4/3$, podemos tomar la misma N que sirve para alguna $\varepsilon < 4/3$ dada y afirmar que, para toda $n \geq N$, $|a_n - L| < \varepsilon < 4/3 \leq \tilde{\varepsilon}$, y se sigue cumpliendo la definición de convergencia.

De algún modo, esto significa que para probar convergencia sólo tenemos que preocuparnos por las $\varepsilon > 0$ que sean pequeñas, pues si logramos que la definición de convergencia se cumpla para ε pequeña, podremos asegurarnos que se cumple para ε más grande. La dificultad de la convergencia se da para verificar que *la sucesión se acerca muchísimo al límite conforme n crece,* y es por eso que lo “difícil” es obtener una N para ε pequeña.

Otra nota importante: Cuando uno empieza a aprender a hacer pruebas de convergencia, normalmente uno siempre hace un proceso como el de los ejemplos anteriores, es decir, toma una ε y va desarrollando las desigualdades con flechas $\Leftarrow$ hasta encontrar una condición adecuada para N que garantice que, si $n \geq N$, entonces $|a_n - L| < \varepsilon$. Sin embargo, la manera en la que uno debe presentar la demostración para dársela a leer a alguien más, es con las flechitas en la dirección $\Rightarrow$. Por ejemplo, tomando de nuevo la sucesión (a_n) del inciso (b) de arriba, la manera formal de probar que $a_n \longrightarrow 1$ es la siguiente:
Sea $\varepsilon > 0$. Elijamos $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > \frac{1}{\varepsilon^2}$. Entonces,

$$\begin{aligned} n \geq N &\Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon^2} \\ &\Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon^2 \\ &\Rightarrow \left|(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}\right| < \varepsilon \\ &\Rightarrow |a_n - 1| < \varepsilon. \end{aligned}$$

De aquí se observa claramente que se cumple la definición de que (a_n) converge a 1 cuando $n \to \infty$.
Los ejemplos (c) y (d) dados anteriormente muestran que encontrar una N explícita que funcione para una ε dada, puede tener dificultades técnicas. El siguiente resultado es muy útil para simplificar las pruebas de $\varepsilon - N$ y para aprovechar el conocimiento que tengamos acerca de límites de alguna sucesión, para encontrar límites de sucesiones más "complicadas".

1.5. El Lema del Sándwich

Teorema 1.7. *Sean (b_n) y (c_n) sucesiones reales. Supongamos que $c_n \longrightarrow 0$ y que $0 \leq |b_n| \leq |c_n|$ para toda $n \in \mathbb{N}^+$. Entonces, $b_n \longrightarrow 0$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Buscamos $N \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $n \geq N$, $|b_n - 0| < \varepsilon$.
Como $c_n \longrightarrow 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ que $|c_n - 0| < \varepsilon$ para toda $n \geq N$. Entonces, para ésa N, tendremos que

$$|b_n - 0| = |b_n| \leq |c_n| = |c_n - 0| < \varepsilon.$$

Esto concluye la demostración. $\square$

Ejemplos 1.8. Aplicaciones del Lema del Sándwich:

(a) Retomamos el Ejemplo 1.6(c): Nótese que, para toda $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq n \leq n^2 - n + 1$. Entonces,

$$0 < \frac{1}{n^2 - n + 1} \leq \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \text{ cuando } n \longrightarrow \infty.$$

Podemos aplicar el Lema del Sándwich para concluir que $\dfrac{1}{n^2 - n + 1} \longrightarrow 0$.

(b) Se puede probar por inducción que $0 \leq 2^{-n} \leq 1/n$ para toda $n \in \mathbb{N}^+$. Entonces, el Lema del Sándwich nos permite concluir que 2^{-n} converge a 0.

(c) Sea $a_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$. Afirmamos que $a_n \longrightarrow 1$. Para ver esto, nótese que

$$\begin{aligned} 0 \leq |a_n - 1| &= \frac{\sqrt{n^2+1} - n}{\sqrt{n^2+1}} \leq \frac{\sqrt{n^2+2n+1} - n}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n^2+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} < \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Podemos entonces aplicar el Lema del Sándwich, utilizando que sabemos que $1/n \longrightarrow 0$. Esto muestra que $|a_n - 1| \longrightarrow 0$, que es equivalente a mostrar que $a_n \longrightarrow 1$.

Antes de proceder a considerar más ejemplos, es necesario hacer las siguientes dos observaciones importantes:
Observación 1: Si (a_n) es una sucesión, entonces $a_n \to 0$ si y sólo si $|a_n| \to 0$.
Para verificar esto lo único que necesitamos es la definición de convergencia. Notemos que:

$$\begin{aligned} & a_n \to 0 \\ \Leftrightarrow & \forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N\, |a_n - 0| < \varepsilon \\ \Leftrightarrow & \forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N\, |a_n| < \varepsilon \\ \Leftrightarrow & \forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N\, ||a_n| - 0| < \varepsilon \\ \Leftrightarrow & |a_n| \to 0. \end{aligned}$$

Observación 2: Si (a_n) es una sucesión, entonces $a_n \to L$ si y sólo si $|a_n - L| \to 0$.
Al igual que para la observación anterior, lo único que necesitamos aquí es la definición de convergencia. Notemos que:

$$\begin{aligned} & a_n \to L \\ \Leftrightarrow & \forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N\, |a_n - L| < \varepsilon \\ \Leftrightarrow & \forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N\, ||a_n - L| - 0| < \varepsilon \\ \Leftrightarrow & |a_n - L| \to 0 \end{aligned}$$

1.6. Más ejemplos: un límite importante utilizando técnicas útiles.

Ejemplos 1.9. (a) Sea $c \in \mathbb{R}$ un número real cualquiera tal que $|c| < 1$. Afirmamos que $c^n \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$. Podemos escribir $|c| = \frac{1}{1+y}$ para algún $y > 0$ (¿por qué?). Tomemos ahora $\varepsilon > 0$ arbitrario. Entonces, por la desigualdad de Bernoulli (vista en clase), tenemos que:

$$|c^n - 0| = |c|^n = \frac{1}{(1+y)^n} \leq \frac{1}{1+ny} < \frac{1}{ny} < \varepsilon$$

y lo anterior se cumple para toda $n \geq N$, donde $N \in \mathbb{N}^+$ se elige de tal manera que $N \geq \frac{1}{y\varepsilon}$.

1.7. Propiedades de los límites

El siguiente resultado establece algo muy importante acerca de los límites de sucesiones. Nos dice que cuando una sucesión converge a un número real, éste es el único al cual la sucesión converge. En otras palabras, si una sucesión converge, hay un único número real al cual la misma "se acerca indefinidamente".

Teorema 1.10 (Unicidad del límite de una sucesión)**.** *Sea (a_n) una sucesión real y supongamos que $L_1 \in \mathbb{R}$ y $L_2 \in \mathbb{R}$ son tales que $a_n \to L_1$ y $a_n \to L_2$. Entonces, $L_1 = L_2$.*

Demostración. Haremos la demostración por reducción al absurdo. Supongamos que $a_n \to L_1$ y $a_n \to L_2$ pero que $L_1 \neq L_2$. Por tricotomía, esto significa que, o bien $L_1 < L_2$, o bien $L_2 < L_1$. Tendríamos que analizar entonces los dos casos y llegar a una contradicción en cada una de estas dos situaciones. Sin embargo, dado que la prueba en ambos casos sería la misma, y lo único que cambiaría sería el orden en el que aparecen L_1 y L_2, **supondremos** que $L_1 < L_2$ y decimos que esta suposición es *sin perder generalidad*, es decir, la prueba es general en el sentido de que aplica para los dos casos.
Ahora, como $L_1 < L_2$, entonces el número $L_2 - L_1$, que es la distancia entre L_1 y L_2, es positivo. Podemos definir entonces al número

$$\varepsilon := \frac{L_2 - L_1}{2}.$$

ε es la distancia entre L_1 y el punto medio entre L_1 y L_2. De la misma forma, ε es la distancia entre L_2 y el punto medio entre L_1 y L_2.
Notemos además que $L_1 + \varepsilon = \frac{L_1+L_2}{2} = L_2 - \varepsilon$.
Ahora, como $a_n \to L_1$, entonces para el $\varepsilon > 0$ fijo definido arriba, sabemos que existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N_1$, se cumple que

$$|a_n - L_1| < \varepsilon.$$

De igual forma, como $a_n \to L_2$, entonces para el $\varepsilon > 0$ fijo definido arriba, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N_2$, se cumple que

$$|a_n - L_2| < \varepsilon.$$

De este modo, si hacemos $N := \max\{N_1, N_2\}$, entonces $N \geq N_1$ y $N \geq N_2$. Entonces, las dos condiciones anteriores implican que

$$|a_N - L_1| < \varepsilon \quad \text{y} \quad |a_N - L_2| < \varepsilon.$$

Esto implica entonces que

$$L_1 - \varepsilon < a_N < L_1 + \varepsilon \quad \text{y} \quad L_2 - \varepsilon < a_N < L_2 + \varepsilon.$$

En particular, se sigue que

$$a_N < L_1 + \varepsilon \quad \text{y} \quad L_2 - \varepsilon < a_N.$$

Esto es una contradicción a la tricotomía, pues $L_1 + \varepsilon = L_2 - \varepsilon$. Por lo tanto, hemos concluido la prueba y podemos afirmar que $L_1 = L_2$. □

El teorema anterior es muy importante, pues nos dice que una sucesión sólo puede acercarse indefinidamente a un único número real. Recordemos, sin embargo, que también es posible que una sucesión no sea convergente.
Los siguientes resultados establecen la manera en la que el límite interacciona con el valor absoluto y con desigualdades.

Proposición 1.11. *Sea (a_n) una sucesión que converge a $L \in \mathbb{R}$. Entonces, la sucesión $(|a_n|)$ converge al número $|L|$.*

Demostración. La desigualdad del triángulo invertida nos dice que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$||a_n| - |L|| \leq |a_n - L|.$$

Así, si tomamos $\varepsilon > 0$, sabemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N$,

$$|a_n - L| < \varepsilon.$$

Esto significa que, para esa misma $N \in \mathbb{N}$, si $n \geq N$ tendremos que $||a_n| - |L|| < \varepsilon$. Por definición de convergencia, y como ε fue arbitraria, esto significa que $(|a_n| \to |L|)$.[1] □

Proposición 1.12. *Sean (a_n) y (b_n) sucesiones reales. Supongamos que $a_n \to L$, $b_n \to M$ y, además, que $a_n \leq b_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $L \leq M$.*

Demostración. Realizaremos esta prueba por contradicción. Supongamos que $L \not\leq M$. Entonces, por tricotomía, $M < L$. Sea $\varepsilon := (L - M)/2$. Sabemos entonces que $\varepsilon > 0$.
Por lo tanto, usando la definición de convergencia para (a_n) y (b_n) respectivamente, podemos encontrar N_1 y N_2 tales que:

(I) $\forall n \geq N_1 \quad |a_n - L| < \varepsilon$ y

(II) $\forall n \geq N_2 \quad |b_n - M| < \varepsilon$.

[1]Nótese que esta prueba también podría haberse hecho usando el Lema del Sándwich.

Entonces, si $N := \max(N_1, N_2)$, como $N \geq N_1$ y $N \geq N_2$, podemos utilizar (1.1) para concluir que

$$L - \varepsilon < a_N \leq b_N < M + \varepsilon.$$

Esto implica que $L - M < 2\varepsilon = L - M$, que es una contradicción. Esto concluye la prueba. $\square$

Nota: La proposición anterior nos dice que los límites *preservan desigualdades* del tipo $\leq$. Es muy importante notar que el resultado anterior no es válido si sustituimos $\leq$ por $<$. Por ejemplo, la sucesión $a_n = 1/n$ es tal que $a_n > 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Además, sabemos que $a_n \to 0$, de modo que *no* se cumple la desigualdad estricta $\lim a_n > 0$.

2. Colas de sucesiones

El propósito de esta sección es establecer que, dada una sucesión (a_n), el que ésta converja o no, depende únicamente de cómo la sucesión se comporta cuando $n \to \infty$, y el comportamiento de los primeros términos de la sucesión no tiene ninguna inferencia en esto.

Definición 2.1. *Si $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión y $k \in \mathbb{N}$ es un número natural **fijo**, definimos a la sucesión*

$$b_n = a_{n+k},$$

*donde $n \in \mathbb{N}$. En este caso, decimos que la sucesión $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ es una **cola de la sucesión** (a_n).*

Ejemplo:
La sucesión $\left(\frac{1}{2^{n+4}}\right)$ es una cola de la sucesión $\left(\frac{1}{2^n}\right)$. Aquí, hemos tomado $k = 4$.
La importancia de considerar colas de sucesiones queda manifestada en el siguiente teorema (que será demostrado el lunes por Manuel).

Teorema 2.2. *Sean (a_n) una sucesión y (b_n) una cola de la sucesión (a_n) de acuerdo a la definición anterior. Entonces, la sucesión $a_n \to L$ si y sólo si $b_n \to L$, donde L es un número real fijo.*