Universidad Nacional Autónoma de México **Facultad de Ciencias**

Cálculo Diferencial e Integral I 2020-1
Profra: Dra. Judith Campos Cordero Ayudantes: Jonathan Giovanni Gil Juárez
. Manuel Alejandro Zúñiga Pérez

Tarea 3

1. Demuestra lo siguiente:

(a) Para todo $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ y todo $m \in \mathbb{N}^+$, $(a^{-1})^m = (a^m)^{-1}$.

(b) Para todo $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ y todo $m = -1, -2, -3, ...,$ $a^{m+1} = a^m a$.

(c) Concluye que, para todo $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ y cualesquiera $m, n \in \mathbb{Z}$, $a^{m+n} = a^m a^n$. (*Utiliza la pregunta 12 de la Tarea 2*).

2. **(*)** Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que $|a| < c$ y $|b| < d$. Prueba que:

(i) $|a + b| < c + d$;

(ii) $|ab| < cd$.

3. Encuentra todos los números $x \in \mathbb{R}$ para los cuales se satisface que

$$2 < |1 - x| < 3.$$

Prueba tu respuesta.

4. **(*)** Establece una definición para el máximo de dos números reales a y b, denotado como $\max(a, b)$. Explica cuáles son los axiomas de los números reales que justifican que tu definición está bien dada.

(a) Demuestra que $\max(a, b) = \frac{a+b+|a-b|}{2}$.

(b) Define ahora al mínimo entre a y b, denotado como $\min(a, b)$ y establece una fórmula análoga a la del inciso anterior para el mínimo.

5. Haz un dibujo del conjunto de puntos (x, y) en $\mathbb{R}^2$ que hacen que se satisfaga cada una de las siguientes condiciones:

$$(a) \quad |x| + |y| = 1 \qquad\qquad (b) \quad \max(|x|, |y|) = 1$$

6. **(*)** Demuestra que el conjunto $\{2^n : n \in \mathbb{N}\}$ no está acotado superiormente. (No se vale usar propiedades de logaritmos).

7. Establece cuáles de los siguientes conjuntos tienen supremo, ínfimo, máximo o mínimo y determina, sin dar demostración, el valor de cada uno en su caso.

(a) $\mathbb{Q} \cap [0, \sqrt{2}]$;

(b) $\{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+\}$;

(c) $\{3^n : n \in \mathbb{Z}\}$;

(d) $\bigcup_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}]$.

8. Sean S y T subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$.

(a) **(*)** Supongamos que S y T están acotados superiormente. Demuestra que $S \cup T$ está acotado superiormente y $\sup(S \cup T) = \max(\sup S, \sup T)$.

(b) Supongamos que S y T están acotados inferiormente. Definamos al conjunto

$$S + T := \{s + t : s \in S \text{ y } t \in T\}$$

Demuestra que $S + T$ está acotado inferiormente y que $\inf(S + T) = \inf S + \inf T$.

(c) Supongamos que S y T están acotados superiormente. Tomando al conjunto $S + T$ como en el inciso anterior, demuestra que $S + T$ está acotado superiormente y que $\sup(S + T) = \sup S + \sup T$.