Universidad Nacional Autónoma de México **Facultad de Ciencias**

Cálculo Diferencial e Integral I 2020-1
Profra: Dra. Judith Campos Cordero
Ayudantes: Jonathan Giovanni Gil Juárez
Manuel Alejandro Zúñiga Pérez

Tarea 5

1. Escribe, utilizando lenguaje matemático formal, la definición de que una sucesión (a_n) sea convergente. Escribe también la negación de este enunciado, es decir, escribe en lenguaje matemático la definición de que una sucesión (a_n) no sea convergente.

2. Para cada una de las siguientes sucesiones (a_n), y para una $\varepsilon > 0$ arbitraria, encuentra una $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n| < \varepsilon$ para toda $n \geq N$. (No es necesario que la N que encuentras sea óptima. Sólo queremos encontrar alguna N que funcione.)

$$\text{(i)} \quad a_n = \frac{1}{n^2+3}; \quad \text{(ii)} \quad a_n = \frac{1}{n(n-\pi)}; \quad \text{(iii)} \quad \frac{1}{\sqrt{5n-1}}.$$

3. Utiliza el Lema del Sándwich para probar que cada una de las siguientes sucesiones converge a 0.

$$\text{(i)} \quad \frac{n+1}{n^2+n+1}; \quad \text{(ii)} \quad \frac{\cos(n^2)}{2^n}; \quad \text{(iii)}\,\textbf{(*)} \quad \begin{cases} 1/2^n & \text{si } n \text{ es primo} \\ -1/3^n & \text{si } n \text{ no es primo.} \end{cases}$$

4. **(*)**

(a) Demuestra que $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \longrightarrow 0$. *Sugerencia:* Demuestra y utiliza el hecho de que $a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$.

(b) Demuestra que $n^{\frac{1}{n}} \geq 1$ para toda $n \in \mathbb{N}^+$.

(c) Definamos ahora a la sucesión $a_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$. Demuestra, utilizando el teorema del binomio para $(1 + a_n)^n$, que

$$a_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

para toda $n > 1$.

(d) Utiliza los incisos anteriores para demostrar que $n^{\frac{1}{n}} \longrightarrow 1$.

5. **Utiliza la definición de límite** para demostrar lo siguiente:

(i) **(*)** $\lim \frac{2n}{n+1} = 2$;

(ii) $\lim \frac{(-1)^n n}{n^2+1} = 0$;

(iii) $\lim \frac{1}{\sqrt{n+7}} = 0$;

(iv) $\lim \frac{3n+1}{2n+5} = \frac{3}{2}$;

6. Demuestra que $\lim \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 0$.

7. Escribe, utilizando lenguaje matemático formal, la definición de que una sucesión (a_n) es acotada y la definición de que (a_n) tiende a ∞.

Escribe también la negación de las definiciones anteriores.

8. Para cada una de las siguientes sucesiones (a_n), determina si $a_n \to \infty$. Justifica brevemente tus respuestas.

$$\text{(i)} \quad a_n = \frac{n^2+n+1}{n+1}; \quad \text{(ii)} \quad a_n = \frac{n^{3/4}}{\sqrt{5n-1}}; \quad \text{(iii)} \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

9. **(*)** Supongamos que (a_n) es una sucesión tal que $a_n \to 0$. Sea (b_n) una sucesión acotada. Demuestra que $a_n b_n \to 0$.

Ahora, proporciona ejemplos de sucesiones (a_n) y (c_n) de tal forma que tal que $a_n \to 0$ y demostrando que cada una de las siguientes situaciones puede ocurrir:

(i) **(*)** $a_n c_n \to 0$ y (c_n) es acotada;

(ii) $a_n c_n \to \infty$;

(iii) $a_n c_n \to L$ para algún $L \neq 0$;

(iv) $(a_n c_n)$ es acotada y divergente;

(v) $a_n c_n \to -\infty$

(Las sucesiones pueden variar entre cada inciso).

10. (a) Considera la sucesión (a_n) definida como

$$a_n = \frac{n^2-1}{n^2+1}\cos(2\pi n/3).$$

Encuentra subsucesiones adecuadas para demostrar que (a_n) es divergente.

(b) Considera la sucesión $(\cos(n))$. Muestra que, para alguna constante $K > 0$, existen subsucesiones (b_r) y (c_s) de $(\cos(n))$ tales que $b_r > K$ para todo $r \in \mathbb{N}$ y $c_s < -K$ para todo $s \in \mathbb{N}$. Deduce que $(\cos(n))$ es divergente.

11. (a) Sea (a_n) una sucesión tal que las subsucesiones (a_{2n}) y (a_{2n+1}) convergen a un número real L. Demuestra que $a_n \to L$.

(b) Sea (b_n) una sucesión tal que (b_{2n}), (b_{2n+1}) y (b_{3n}) son convergentes. ¿Es posible deducir que (b_n) converge? Proporciona una prueba o contraejemplo para justificar tu respuesta.

12. Para cada una de las siguientes sucesiones (a_n), determina si (a_n) es convergente. Justifica tus respuestas y encuentra el límite cuando éste exista. (Puedes utilizar todos los teoremas de álgebra de límites, desigualdades y teoremas del sándwich).

$$\text{(i)(*)} \quad a_n = \frac{n^2}{n!}; \quad \text{(ii)(*)} \quad a_n = \frac{2^n n^2 + 3^n}{3^n(n+1)+n^7}; \quad \text{(iii)} \quad \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

Sugerencia (ii): probar que $\frac{n^2}{(3/2)^n} \to 0$. Para ello, expresar $3/2 = 1+1/2$ y usar el término $(1/2)^3$ del binomio de Newton. Esto implicará que dicha sucesión está acotada y, por tanto, para el (ii), se puede estimar usando Teorema del Sánwich con la sucesión $1/n$.

Sugerencia (iii): Desarrollar factoriales y comparar con $\frac{1}{n+1}$.