Cálculo Diferencial e Integral I 2020-1

Profra: Dra. Judith Campos Cordero Ayudantes: Jonathan Giovanni Gil Juárez

Manuel Alejandro Zúñiga Pérez

Tarea 6

1. **(*)** Sean $x_1 > 1$ y $x_{n+1} := 2 - \frac{1}{x_n}$ para cada $n \geq 2$. Demuestra que (x_n) está acotada y que es monótona. Encuentra el límite de esta sucesión.

2. Sean $a > 0$ y $z_1 > 0$. Se define $z_{n+1} := (a + z_n)^{\frac{1}{2}}$ para $n \in \mathbb{N}^+$. Demuestra que (z_n) converge y encuentra su límite.

3. Sea (x_n) una sucesión acotada y para cada $n \in \mathbb{N}$ sean

$$s_n := \sup\{x_k : k \geq n\}$$

y

$$t_n := \text{ínf}\{x_k : k \geq n\}.$$

Demostrar que (s_n) y (t_n) son sucesiones convergentes. Así mismo, demostrar que si $\text{lím}\, s_n = \text{lím}\, t_n$, entonces (x_n) es convergente y

$$\text{lím}\, x_n = \text{lím}\, s_n = \text{lím}\, t_n.$$

A $\text{lím}\, s_n$ se le llama el límite superior de (x_n) y a $\text{lím}\, t_n$ se le llama el límite inferior de (x_n).

4. Sea $x_n := \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2}$ para cada $n \in \mathbb{N}^+$. Demuestra que (x_n) es creciente y está acotada y, en consecuencia, converge.
Sugerencia: Obsérvese que, si $k \geq 2$, entonces $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

5. **(*)** Supóngase que $x_n \geq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y que $\text{lím}(-1)^n x_n$ existe. Demostrar que (x_n) converge.

6. Demostrar que si (x_n) no está acotada, entonces existe una subsucesión (x_{n_k}) tal que $\text{lím}\, \frac{1}{x_{n_k}} = 0$.

7. Sea (x_n) una sucesión acotada y sea $s := \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Demuestra que si $s \notin \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, entonces existe una subsucesión de (x_n) que converge a s.

8. **(*)** Demostrar directamente a partir de la definición que las siguientes son sucesiones de Cauchy:

$$\text{(a)} \left(\frac{n}{n+1}\right) \qquad \text{(b)} \left(1 + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}\right).$$

9. Demostrar directamente a partir de la definición que las siguientes no son sucesiones de Cauchy.

$$\text{(a)} \ ((-1)^n) \qquad \text{(b)} \left(n + \frac{(-1)^n}{n}\right).$$

10. **(*)** Demostrar directamente que una sucesión creciente, monótona y acotada es una sucesión de Cauchy.