Universidad Nacional Autónoma de México **Facultad de Ciencias**

Cálculo Diferencial e Integral I 2020-1

Profra: Dra. Judith Campos Cordero Ayudantes: Jonathan Giovanni Gil Juárez

. Manuel Alejandro Zúñiga Pérez

Tarea 7

1. (a) Sea $p \in \mathbb{N}^+$ un natural positivo fijo. Considera las sumas parciales para probar que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+p)}$$

converge al número

$$\frac{\sum_{j=1}^{p} \frac{1}{j}}{p}.$$

(b) **(*)** Determina si la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k)}{2^k}$$

es convergente.

(c) **(*)** Utiliza el criterio de comparación para probar que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{(k+1)(k+2)^2}$$

es convergente.

2. Sea (a_n) una sucesión real tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente. Considera las sumas parciales

$$s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n \quad \text{y} \quad S_n = |a_1| + |a_2| + ... + |a_n|$$

y utilízalas para demostrar que

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

3. Definimos al número e como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Demuestra que la sucesión de sumas parciales consta de números positivos y que es monótona creciente y acotada. Concluye que el número e, definido como dicho límite, existe.
Sugerencia para encontrar una cota superior: Compara con una suma de una progresión geométrica adecuada.

4. **(*)** Demuestra que si $k^2 a_k \to 0$, entonces $\sum a_k$ es convergente.