

Tarea 8

1. Determinar una condición sobre $|x - 1|$ que asegure que:

(i) $|x^2 - 1| < 1/2$;

(ii) $|x^2 - 1| < \frac{1}{10^3}$;

(iii) $|x^3 - 1| < \frac{1}{N}$ para una $N \in \mathbb{N}^+$ dada.

2. (*) Sean $E \subseteq \mathbb{R}$, $c \in E'$ y $f: E \rightarrow \mathbb{R}$. Demostrar que $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ si y sólo si $\lim_{x \rightarrow c} |f(x) - L| = 0$.

3. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $c \in \mathbb{R}$. Demostrar que $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ si y sólo si

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x + c) = L.$$

4. (*) Sea $c \in \mathbb{R}$. Demostrar que $\lim_{x \rightarrow c} x^3 = c^3$.

5. Sea $c \geq 0$. Demostrar que $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt{x} = \sqrt{c}$.

6. Determina cuáles de los siguientes límites existen en \mathbb{R} y, en caso de que existan, encuentra su valor. Demuestra tus respuestas.

(i) (*) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{1-x}$;

(ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{1+x}$;

(iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{|x|}$;

(iv) (*) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$;

(v) $\lim_{x \rightarrow 0} (x + \operatorname{sgn}(x))$;

(vi) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x + 1}{x + 1}$.

7. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q}; \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Demostrar que existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ y que, si $c \neq 0$, entonces no existe $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$.

8. Demuestra que no existe $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$.