Universidad Nacional Autónoma de México **Facultad de Ciencias**

Cálculo Diferencial e Integral I 2020-1

Profra: Dra. Judith Campos Cordero Ayudantes: Jonathan Giovanni Gil Juárez

. Manuel Alejandro Zúñiga Pérez

Tarea 9

1. Sean $f, g\colon E \to \mathbb{R}$ y sea $p \in E'$. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas dando prueba o contraejemplo en cada caso.

2. (i) Si existe $\lim_{x\to p} f(x)$ y existe $\lim_{x\to p}(f+g)(x)$, entonces existe $\lim_{x\to} pg(x)$.

(ii) Si existe $\lim_{x\to p} f(x)$ y existe $\lim_{x\to p}(fg)(x)$, entonces existe $\lim_{x\to} pg(x)$

3. Dar ejemplos de funciones f y g tales que f y g no tengan límite cuando $x \to p$ pero de tal forma que $f+g$ y fg sí tengan límite cuando $x \to p$.

4. Dar un ejemplo de una función que tiene un límite por la derecha pero no un límite por la izquierda en un punto.

5. Sea $E \subseteq \mathbb{R}$, sea $f\colon E \to \mathbb{R}$ y sea $c \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación de los conjuntos $E \cap (c, \infty)$ y $E \cap (-\infty, c)$. Demuestra que $\lim_{x\to c} f(x) = L$ si y sólo si $\lim_{x\to c^+} f(x) = L = \lim_{x\to c^-} f(x)$

6. Determina si los siguientes límites existen o no. En caso de que existan, determina cuál es su valor. Demuestra tus respuestas.

(i) $\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x-1}$; (v) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}}{x}$

(ii) $\lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1}$; (vi) $\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x}$

(iii) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x+2}{\sqrt{x}}$; (vii) $\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+3}$

(iv) $\lim_{x\to \infty} \frac{x+2}{\sqrt{x}}$; (viii) $\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}+x}$

7. Demuestra las siguientes afirmaciones:

(a) Sea f una función definida sobre un intervalo (a, ∞), con $\delta > 0$. Entonces, existe $\lim_{x\to\infty} f(x)$ si y sólo si existe $\lim_{x\to 0^+} f(1/x)$ y, en ese caso, ambos límites son iguales.

(b) Sean $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones. Supongamos que $f(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$ y que $g(x) \to l$ cuando $x \to \infty$. Entonces, $g(f(x)) \to l$ cuando $x \to \infty$.

8. Sean $f, g\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ funciones para las cuales existe el límite en $\mathbb{R}$ cuando $x \to \infty$ y tales que $f(x) \leq g(x)$ para toda $x \in (0, \infty)$. Demuestra que $\lim_{x\to\infty} f(x) \leq \lim_{x\to\infty} g(x)$.

9. Sea $f\colon (a, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to\infty} xf(x) = L$, donde $L \in \mathbb{R}$. Demuestra que entonces $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

10. (i) Sean f y g funciones tales que $\lim_{x\to c} f(x) = L$, donde $L > 0$, y $\lim_{x\to c} g(x) = \infty$. Demuestra que $\lim_{x\to c} f(x)g(x) = \infty$.

(ii) Proporciona un ejemplo de funciones f y g tales que $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to c} g(x) = \infty$, pero $\lim_{x\to c} f(x)g(x) \neq \infty$.

11. Proporciona ejemplos de funciones f y g definidas en $(0, \infty)$ tales que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, pero de modo que $\lim_{x\to\infty}(f - g)(x) = 0$.

12. Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto tal que $(a, \infty) \subseteq E$ y sea $f\colon E \to \mathbb{R}$. Demuestra que los siguientes enunciados son equivalentes:

(i) $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$;

(ii) para toda sucesión $(x_n) \subseteq E$ tal que $x_n \to \infty$, la sucesión $(f(x_n))$ converge a L.

13. Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto tal que $(a, \infty) \subseteq E$ y sea $f\colon E \to \mathbb{R}$. Demuestra que los siguientes enunciados son equivalentes:

(i) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$;

(ii) para toda sucesión $(x_n) \subseteq E$ tal que $x_n \to \infty$, la sucesión $(f(x_n))$ tiende a ∞.