Cálculo Diferencial e Integral I 2020-1
Profra: Dra. Judith Campos Cordero
Ayudantes: Jonathan Giovanni Gil Juárez
Manuel Alejandro Zúñiga Pérez

Tarea 10

1. Sean $E \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto de números reales, $p \in E$, $f\colon E \to \mathbb{R}$ y $g\colon E \to \mathbb{R}$ funciones definidas en E y continuas en el punto p. Supongamos que $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ son constantes. Demuestra que la función $\alpha f + \beta g\colon E \to \mathbb{R}$ es continua en p.

2. Sea $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Determina el conjunto de puntos del dominio en el que es continua la función f.

3. Demuestra que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = |x|$ es continua en p para todo $p \in \mathbb{R}$.

4. Determina los puntos de continuidad de las siguientes funciones e indica los teoremas que se usan en cada caso.

(i) **(*)** $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $f(x) := \frac{x^2+2x+1}{x^2+1}$;

(ii) $g\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$, con $g(x) := \sqrt{x + \sqrt{x}}$;

(iii) **(*)** $h\colon \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, con $h(x) := \frac{\sqrt{1+|\sin(x)|}}{x}$;

(iv) $k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $k(x) := \cos(\sqrt{1 + x^2})$.

5. Construye ejemplos de funciones f y g que sean discontinuas en un punto c de $\mathbb{R}$ tales que:

(a) $f + g$ sea continua en c;

(b) fg sea continua en c.

6. Dar un ejemplo de una función $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ que sea discontinua en todos los puntos de $[0, 1]$ pero que $|f|$ sea continua en $[0, 1]$.

7. Proporciona ejemplos de funciones con las siguientes propiedades:

(a) una función continua $f\colon [0, 1) \to \mathbb{R}$ que no sea acotada;

(b) una función continua $g\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ que no sea constante y que alcance tanto su valor máximo como su valor mínimo;

(c) una función continua $h\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ que sea acotada, que alcance su valor máximo en una cantidad infinita numerable de puntos y que alcance su valor mínimo en una cantidad infinita no numerable de puntos.
Sugerencia: Recuerda que cualquier intervalo no vacío de números reales es no numerable. Si en primera instancia no logras construir una función que satisfaga ambas condiciones simultáneamente, comienza por construir una que satisfaga la primer condición y otra que satisfaga la segunda condición. Después, "pégalas" adecuadamente.

8. **(*)** Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ tal que para cada $x \in [a,b]$ existe un $y \in [a,b]$ tal que $|f(y)| \leq \frac{1}{2}|f(x)|$. Demuestra que existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = 0$.
Sugerencia: Construye una sucesión apropiada.

9. **(*)** Utiliza el *Teorema de las funciones continuas acotadas* visto en clase, para probar que si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y si $f(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$ y también $f(x) \to \infty$ cuando $x \to -\infty$, entonces existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq f(x_0)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

10. Demostrar que todo polinomio de grado impar con coeficientes reales tiene al menos una raíz real.

11. Demostrar que la ecuación $x = \cos(x)$ tiene una solución en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.

12. Sea $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua y tal que $f(0) = f(1)$. Demostrar que existe un punto $c \in [0, \frac{1}{2}]$ tal que $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$.
Sugerencia: Considera $g(x) := f(x) - f(x + \frac{1}{2})$.
Concluye que existen, en cualquier momento, puntos antípodas[1] en el ecuador terrestre que tienen la misma temperatura.

13. **(*)** Sea $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$. Demuestra que $f(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$ ó $f(x) < 0$ para todo $x \in (a,b)$.

[1]Dos puntos sobre una circunferencia son llamados *antípodas* si están en extremos opuestos de un diámetro.