Cálculo Diferencial e Integral I 2020-1
Profra: Dra. Judith Campos Cordero
Ayudantes: Jonathan Giovanni Gil Juárez
Manuel Alejandro Zúñiga Pérez

Tarea 11

1. Si f y g son funciones crecientes (o no decrecientes) en un intervalo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, demuestra que $f + g$ es creciente (o no decreciente) en $[a, b]$.

2. Demuestra que tanto $f(x) = x$ como $g(x) = x - 1$ son funciones crecientes en $[0, 1]$, pero que su producto fg no es creciente en $[0, 1]$.

3. Sean f y g dos funciones crecientes en el intervalo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Supongamos además que $f(x) \geq 0$ y $g(x) \geq 0$. Demuestra que fg es creciente en $[a, b]$.

4. Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Supongamos que $f(a) < f(b)$ y que f es inyectiva. Utiliza el Teorema del Valor Intermedio para probar que $f(a) < f(x) < f(b)$ para todo $x \in (a, b)$. Concluye que f es entonces creciente (en el sentido estricto).

5. Sea $g\colon (-1, 1) \to \mathbb{R}$ la función definida como

$$g(x) := \frac{x}{1 - |x|}.$$

Demuestra que g es inyectiva, encuentra $g((-1, 1))$ y calcula g^{-1}. ¿Son g y g^{-1} funciones continuas?

6. (a) ¿Cuáles de las siguientes funciones f, definidas en el intervalo $[-1, 1]$ en (i) y (ii) tienen inversas $f^{-1}\colon [f(-1), f(1)] \to [-1, 1]$? ¿Cuáles tienen inversa continua?. Justifica brevemente tus respuestas.

(i) $f(x) := (x + 1)^2$;

(ii) $f(x) := \begin{cases} x & \text{si } x \in [-1, 0] \\ x + 1 & \text{si } x \in (0, 1] \end{cases}$

(b) Definimos a la función *tangente*, $\tan\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, como $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Dando por hecho que tan es creciente, continua, y que $\tan(x) \to \infty$ cuando $x \to \frac{\pi}{2}$ y $\tan(x) \to -\infty$ cuando $x \to -\frac{\pi}{2}$, **demuestra** cuidadosamente que *tan* tiene una función inversa que es continua en $\mathbb{R}$. Llamamos *arctan* a la inversa de la función tangente.