Universidad Nacional Autónoma de México **Facultad de Ciencias**

Cálculo Diferencial e Integral I 2020-1
Profra: Dra. Judith Campos Cordero
Ayudantes: Jonathan Giovanni Gil Juárez
Manuel Alejandro Zúñiga Pérez

Tarea 12

1. (a) Partiendo directamente de la definición, demuestra que si $f(x) = 1/x$, entonces $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$ para $a \neq 0$.

(b) Demuestra que la tangente a la gráfica de f en el punto $(a, 1/a)$ no corta a la gráfica de f más que en el punto $(a, 1/a)$.

2. Demuestra que si $f(x) = \sqrt{x}$, entonces $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$.

3. Utiliza la definición para encontrar la derivada de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, donde $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$.

4. Considera la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Demuestra que f es derivable en $x = 0$.

5. Sea $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en (a, b). Demuestra que si $g(x) = f(x) + c$, con $c \in \mathbb{R}$, entonces $g'(x) = f'(x)$. Traza un dibujo explicativo.

6. Supongamos que f es derivable en x. Demostrar que

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

Sugerencia: Recuerda que un número no se altera cuando se le suma y resta la misma cantidad a la vez.

7. (a) Sea $g\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $x_0 \in (a, b)$ y supongamos que $g'(x_0) \neq 0$. Demuestra que $\frac{1}{g}$ es derivable en x_0 y que

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

(b) Sean $f, g\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables en $x_0 \in (a, b)$ y supongamos que $g'(x_0) \neq 0$. Demuestra que $\frac{f}{g}$ es derivable en x_0 y que

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Puedes dar por hecho todas las propiedades de álgebra de límites.

8. (a) Demuestra que la función f definida como

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

es derivable para todo $x \in \mathbb{R}$. Encuentra su derivada.

(b) Calcula $f''(x)$ para cada $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. Demuestra que $f''(0)$ no existe.

(c) Construye una función $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que g'' exista y sea continua, pero tal que $g'''(0)$ no exista.

9. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Decimos que

(i) f es par si $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(ii) f es impar si $f(x) = -f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(a) Demuestra que, si f es par, entonces $f'(x) = -f'(-x)$.

(b) Demuestra que, si f es impar, entonces $f'(x) = f'(-x)$.

10. Sea $n \in \mathbb{N}^+$ y consiera a la función

$$f(x) := \begin{cases} x^n & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Demuestra que existe $f^{(n-1)}$ y encuentra la fórmula correspondiente. Demuestra también que $f^{(n)}(0)$ no existe.

11. Para cada una de las siguientes funciones, determina cuál es su máximo dominio de definición. Encuentra los puntos críticos, determina cuáles de ellos son máximos o mínimos, y describe en qué conjuntos la función es creciente o decreciente.

(i) $f(x) := x^2 - 3x + 5$;

(ii) $g(x) := 3x - 4x + 2$;

(iii) $h(x) := x^3 - 3x - 4$;

(iv) $k(x) := \frac{x+1}{x}$;

(v) $p(x) := \frac{x}{x^2+1}$;

(vi) $q(x) := \sqrt{x} - 2\sqrt{x+2}$.

12. Considera las funciones definidas en $\mathbb{R}$ como:

$$f(x) = x^3 + 1 \qquad g(x) = 1 - (x-1)^2 \qquad h(x) = \arctan(x).$$

Proporciona fórmulas explícitas para las inversas de f y g. Esboza las gráficas de f, g y h y de sus inversas. Determina los puntos en los que las inversas son diferenciables.

13. Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes reales. Utiliza el Teorema de Rolle para demostrar que la ecuación

$$0 = (x^2 - x)^2 p'''(x) + 6x(2x^2 - 3x + 1)p''(x) + 6(6x^2 - 6x + 1)p'(x) + 12(2x - 1)p(x)$$

tiene alguna solución en el intervalo $(0, 1)$.
Sugerencia: Si $q(x)$ y $p(x)$ son polinomios arbitrarios con coeficientes reales, calcula la tercer derivada del polinomio $q(x)p(x)$. ¿Cómo relacionar esto con la ecuación anterior?

14. Sean $a > b > 0$ y sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. Demuestra que $a^{\frac{1}{n}} - b^{\frac{1}{n}} < (a-b)^{\frac{1}{n}}$.
Sugerencia: Demuestra que la función $f(x) := x^{\frac{1}{n}} - (x-1)^{\frac{1}{n}}$ es decreciente y evalúa en 1 y en a/b.

15. Muestra que la función dada por

$$f(x) := \begin{cases} 2x^4 + x^4 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

tiene un mínimo global en $x = 0$, pero que f' toma valores tanto positivos como negativos en cualquier intervalo de la forma $(-\delta, 0)$ y también en cualquier intervalo de la forma $(0, \delta)$, con $\delta > 0$.

16. Considera la función

$$g(x) := \begin{cases} x + 2x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Muestra que $g'(0) = 1$, pero que g' toma valores tanto positivos como negativos en cualquier intervalo de la forma $(-\delta, \delta)$ con $\delta > 0$. Esto significa que g no es monótona en ningún intervalo alrededor del 0.

17. Utiliza el Teorema del Valor Medio para demostrar que $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$.

18. Utiliza el Teorema del Valor Medio para probar que $\frac{x-1}{x} < \log x < x - 1$ para toda $x > 0$. (Puedes dar por hecho que $\frac{d}{dx} \log = \frac{1}{x}$.