Universidad Nacional Autónoma de México **Facultad de Ciencias**

Cálculo Diferencial e Integral I 2020-1
Profra: Dra. Judith Campos Cordero Ayudantes: Jonathan Giovanni Gil Juárez
. Manuel Alejandro Zúñiga Pérez

Tarea 13

1. Para cada una de las siguientes funciones, encuentra el máximo y el mínimo en los intervalos indicados, hallando primero los puntos críticos y comparando con los valores que toma la función en los extremos del intervalo correspondiente o en las discontinuidades removibles, en su caso.

(i) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ en $[-2, 2]$;

(ii) $f(x) = x^5 + x + 1$ en $[-1, 1]$;

(ii) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ en $[-1, \frac{1}{2}]$;

(iv) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x+2} & \text{si } x \neq -2 \\ 100 & \text{si } x = -2 \end{cases}$

2. Esboza las gráficas de las funciones de la pregunta anterior.

3. Para cada una de las siguientes funciones definidas en $\mathbb{R}$, hallar todos los maximizantes y minimizantes locales.

(i) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} \text{ si } x \in \mathbb{Q},\ x = \frac{p}{q} \text{ fracción irreducible.} \end{cases}$

(i) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = \frac{1}{n} \text{ para algún } n \in \mathbb{N}^+ \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

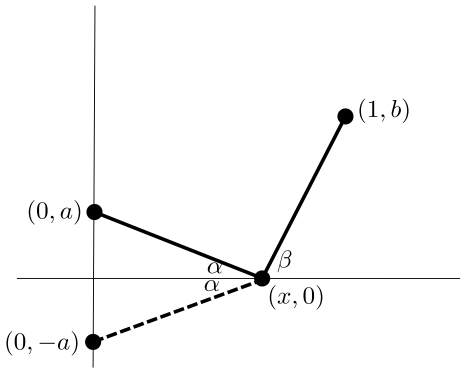
4. Dados dos puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) en $\mathbb{R}^2$, definimos la distancia entre (x_0, y_0) y (x_1, y_1) como el número real

$$d((x_0, y_0), (x_1, y_1)) := \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}.$$

Sea $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ un punto del plano y sea L el conjunto de puntos (x, y) sobre la recta dada por $y = f(x) = mx + b$, donde $m, b \in \mathbb{R}$ son constantes. Hallar el punto $(x_1, y_1) \in L$ tal que la distancia de (x_0, y_0) a (x_1, y_1) sea mínima.
Sugerencia: Observa que minimizar la distancia entre dos puntos es lo mismo que minimizar su cuadrado. Observa también que el problema puede reducirse a encontrar x_1, pues eso determina por completo quién es (x_1, y_1).

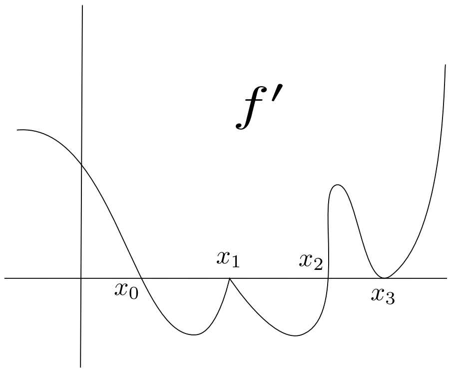
5. Demuestra que entre todos los rectángulos de igual perímetro, el de mayor área es el cuadrado.

6. Se traza una recta desde el punto $(0, a)$ hasta el eje horizontal y desde ahí otra a $(1, b)$, como en la siguiente figura. Demuestra que la longitud total es mínima cuando los ángulos α y β son iguales. *Sugerencia:* Deberá entrar en juego una función. Expresar la longitud en función de x, donde $(x, 0)$ es el punto del eje horizontal.

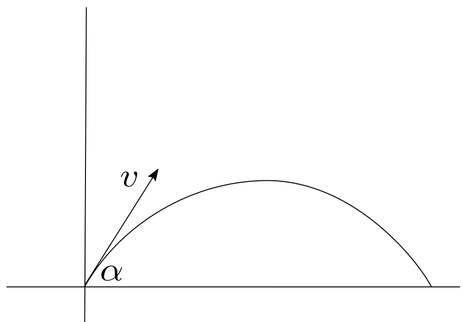


7. Demuestra que la suma de un número y su recíproco es por lo menos 2.

8. La siguiente figura muestra la gráfica de la derivada de una función f. Encuentra todos los maximizantes y minimizantes locales de f.



9. Una bala de cañón se lanza desde el suelo con velocidad v y según un ángulo α, de modo que su componente vertical de velocidad es $v\sin(\alpha)$ y la componente horizontal es $v\cos(\alpha)$. Su distancia $s(t)$ sobre el nivel del suelo obedece a la ley $s(t) = -4{,}9t^2 + (v\sin(\alpha))t$, mientras que su velocidad horizontal se mantiene como la constante $v\cos(\alpha)$.



(a) Demuestra que la trayectoria de la bala es una parábola. *Indicación:* Hallar la posición para cada tiempo t y demostrar que estos puntos están sobre una parábola.

(b) Halla el ángulo α que hace máxima la distancia horizontal recorrida por la bala antes de alcanzar el suelo.

(a) Proporciona un ejemplo de una función f para la cual existe $\lim_{x\to\infty} f(x)$ pero no existe $\lim x \to \infty f'(x)$. *Sugerencia:* Construye una función tal que su derivada oscile entre valores "grandes" cuando $x \to \infty$ pero que la función misma no tenga este comportamiento.

(b) Demuestra que si existen los límites $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to\infty} f'(x)$, entonces $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$.
Sugerencia: Utiliza algún teorema importantísimo de la teoría de derivación.

10. Calcula los siguientes límites sin utilizar la regla de L'Hôpital. Puedes usar cualquier otra propiedad algebraica de los límites y cualquier derivada que necesites.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x)}{x}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^4(x)}{x^3}$.
Sugerencia: $\operatorname{sen}^4(x) = \operatorname{sen}^3(x)\operatorname{sen}(x)$

11. Utiliza la regla de L'Hôpital para calcular los siguientes límites.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\tan(x)}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(\cos(x))}{x^2}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-1}{(e^x-1)^2}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x\operatorname{sen}(x)}$

12. Prueba la regla de L'Hôpital para $x \to \infty$: Sean $f, g\colon (a,\infty) \to \mathbb{R}$ son derivables y tales que $f(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$ y $g(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$. Si $g'(x) \neq 0$ sobre (a,∞) y si

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l,$$

entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Sugerencia: Utiliza el ejercicio 7(a) de la Tarea 9.

13. Calcula

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}.$$

14. Sea (a,b) un intervalo abierto y sea $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ derivable en $c \in (a,b)$. Utiliza la regla de L'Hôpital para demostrar que

$$f''(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - 2f(c) + f(c-h)}{h^2}.$$