

## Tarea 1

1. Para cada una de las siguientes funciones, encuentra el máximo y el mínimo en los intervalos indicados, hallando primero los puntos críticos y comparando con los valores que toma la función en los extremos del intervalo correspondiente o en las discontinuidades removibles, en su caso.

(i)  $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$  en  $[-2, 2]$ ;

(ii)  $f(x) = x^5 + x + 1$  en  $[-1, 1]$ ;

(ii)  $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$  en  $[-1, \frac{1}{2}]$ ;

(iv)  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x+2} & \text{si } x \neq -2 \\ 100 & \text{si } x = -2 \end{cases}$

2. Esboza las gráficas de las funciones de la pregunta anterior.

3. Para cada una de las siguientes funciones definidas en  $\mathbb{R}$ , hallar todos los maximizantes y minimizantes locales.

(i)  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x \in \mathbb{Q}, x = \frac{p}{q} \text{ fracción irreducible y } q > 0. \end{cases}$

(ii)  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = \frac{1}{n} \text{ para algún } n \in \mathbb{N}^+ \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

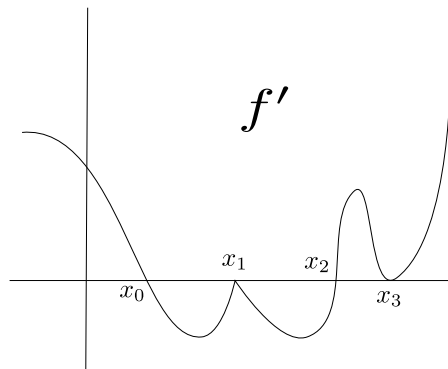
4. Dados dos puntos  $(x_0, y_0)$  y  $(x_1, y_1)$  en  $\mathbb{R}^2$ , definimos la distancia entre  $(x_0, y_0)$  y  $(x_1, y_1)$  como el número real

$$d((x_0, y_0), (x_1, y_1)) := \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}.$$

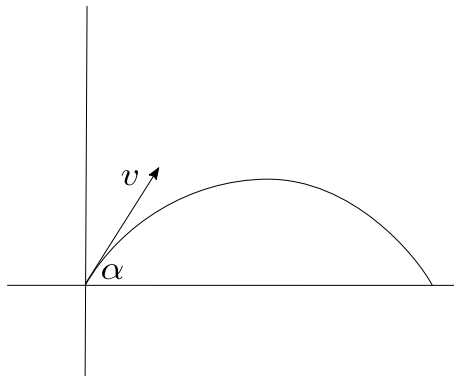
Sea  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  un punto del plano y sea  $L$  el conjunto de puntos  $(x, y)$  sobre la recta dada por  $y = f(x) = mx + b$ , donde  $m, b \in \mathbb{R}$  son constantes. Hallar el punto  $(x_1, y_1) \in L$  tal que la distancia de  $(x_0, y_0)$  a  $(x_1, y_1)$  sea mínima.

*Sugerencia:* Observa que minimizar la distancia entre dos puntos es lo mismo que minimizar su cuadrado. Observa también que el problema puede reducirse a encontrar  $x_1$ , pues eso determina por completo quién es  $(x_1, y_1)$ .

5. Demuestra que entre todos los rectángulos de igual perímetro, el de mayor área es el cuadrado.
6. Demuestra que la suma de un número y su recíproco es por lo menos 2.
7. La siguiente figura muestra la gráfica de la derivada de una función  $f$ . Encuentra todos los maximizantes y minimizantes locales de  $f$ .



8. Una bala de cañón se lanza desde el suelo con velocidad  $v$  y según un ángulo  $\alpha$ , de modo que su componente vertical de velocidad es  $v \sin(\alpha)$  y la componente horizontal es  $v \cos(\alpha)$ . Su distancia  $s(t)$  sobre el nivel del suelo obedece a la ley  $s(t) = -4.9t^2 + (v \sin(\alpha))t$ , mientras que su velocidad horizontal se mantiene como la constante  $v \cos(\alpha)$ .



- (a) Demuestra que la trayectoria de la bala es una parábola. *Indicación:* Hallar la posición para cada tiempo  $t$  y demostrar que estos puntos están sobre una parábola.
- (b) Halla el ángulo  $\alpha$  que hace máxima la distancia horizontal recorrida por la bala antes de alcanzar el suelo.
- (a) Proporciona un ejemplo de una función  $f$  para la cual existe  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  pero no existe  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ . *Sugerencia:* Construye una función tal que su derivada oscile entre valores “grandes” cuando  $x \rightarrow \infty$  pero que la función misma no tenga este comportamiento.
- (b) Demuestra que si existen los límites  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$ .  
*Sugerencia:* Utiliza algún teorema importantísimo de la teoría de derivación.
9. Calcula los siguientes límites sin utilizar la regla de L'Hôpital. Puedes usar cualquier otra propiedad algebraica de los límites y cualquier derivada que necesites.

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^4(x)}{x^3}$ .

*Sugerencia:*  $\text{sen}^4(x) = \text{sen}^3(x)\text{sen}(x)$

10. Utiliza la regla de L'Hôpital para calcular los siguientes límites.

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan(x)}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos(x))}{x^2}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{(e^x - 1)^2}$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \sin(x)}$

11. Demuestra las siguientes afirmaciones:

(a) Sea  $f$  una función definida sobre un intervalo  $(a, \infty)$ , con  $\delta > 0$ . Entonces, existe  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  si y sólo si existe  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(1/x)$  y, en ese caso, ambos límites son iguales.

(b) Sean  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones. Supongamos que  $f(x) \rightarrow \infty$  cuando  $x \rightarrow \infty$  y que  $g(x) \rightarrow l$  cuando  $x \rightarrow \infty$ . Entonces,  $g(f(x)) \rightarrow l$  cuando  $x \rightarrow \infty$ .

12. Prueba la regla de L'Hôpital para  $x \rightarrow \infty$ : Sean  $f, g: (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  son derivables y tales que  $f(x) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow \infty$  y  $g(x) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow \infty$ . Si  $g'(x) \neq 0$  sobre  $(a, \infty)$  y si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l,$$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

*Sugerencia:* Utiliza el ejercicio anterior.

13. Calcula

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{\sqrt{x}}.$$

14. Sea  $(a, b)$  un intervalo abierto y sea  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  derivable en  $c \in (a, b)$ . Utiliza la regla de L'Hôpital para demostrar que

$$f''(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - 2f(c) + f(c-h)}{h^2}.$$

15. (i) Encuentra  $y'$  si

$$x^2 + y^2 = 9.$$

(ii) Encuentra la ecuación de la recta tangente al círculo  $x^2 + y^2 = 9$  en el punto  $(2, \sqrt{5})$ .

16. Encuentra  $y'$  en cada uno de los siguientes casos.

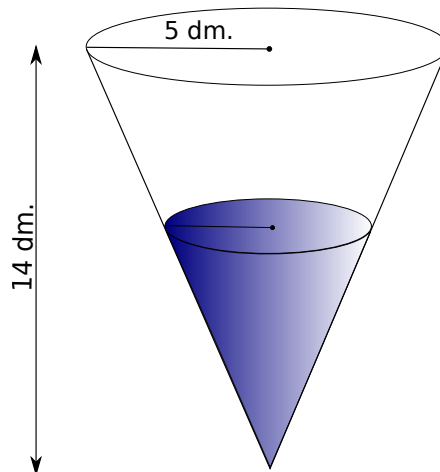
(i)  $x^3 y^5 + 3x = 8y^3 + 1$ .

(ii)  $x^2 \tan(y) + y^{10} \sec(x) = 2x$ .

(iii)  $e^{2x+3y} = x^2 - \log(y^3)$ .

17. Un tanque cónico de agua gotea el líquido a una razón constante de  $2 \text{ dm}^3/\text{hr}$ . El radio de la tapa circular del cono es de  $5 \text{ dm}$ . y la altura del tanque es de  $14 \text{ dm}$ .

- (a) ¿A qué razón está cambiando la profundidad del agua en el tanque cuando la profundidad del agua es de  $6 \text{ dm}$ .?
- (b) ¿A qué razón está cambiando el radio de la superficie de agua en el tanque cuando la profundidad de la misma es de  $6 \text{ dm}$ .?



18. Una lámpara se encuentra sobre un poste de  $4 \text{ m}$ . de largo y una persona de  $1.58 \text{ m}$ . de altura se aleja del poste a una razón de  $60 \text{ cm/s}$ .

- (a) ¿A qué razón se aleja del poste la punta de la sombra de la persona cuando la persona se encuentra a  $6 \text{ m}$ . del poste?
- (b) A qué velocidad se aleja de la persona la punta de la sombra de la persona cuando la persona se encuentra a  $6 \text{ m}$ . del poste?

