Universidad Nacional Autónoma de México **Facultad de Ciencias**

Cálculo Diferencial e Integral II 2020-2
Profra: Dra. Judith Campos Cordero Ayudantes: Jonathan Giovanni Gil Juárez
Manuel Alejandro Zúñiga Pérez

Tarea 2

1. Sea $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Demostrar que f es integrable en $[0,2]$ y calcular su integral.

2. Demostrar que si $g(x) = 0$ para $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ y $g(x) = 1$ para $\frac{1}{2} < x \leq 1$, entonces $\int_0^1 g(x) = \frac{1}{2}$.

3. Sea $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definida como

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Demostrar que $\underline{\int_0^1} h(x)\,dx = 0$ y $\overline{\int_0^1} h(x)\,dx = \frac{1}{2}$. Concluir que entonces h no es integrable en $[0,1]$.

4. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada tal que $f(x) = 0$ en el conjunto $[a,b]$ salvo por un conjunto finito $\{c_1, c_2, ..., c_n\}$. Demostrar que f es integrable y que $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

5. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y supongamos que para cualquier $c \in (a,b)$, la restricción de f al conjunto $[c,b]$ es integrable. Demostrar que f es integrable en $[a,b]$ y que $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to a} \int_c^b f(x)\,dx$.

6. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y tal que $f(x) \geq 0$ para toda $x \in [a,b]$. Demostrar que $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \geq 0$.

7. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Demostrar que si $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = 0$, entonces $f(x) = 0$ para toda $x \in [a,b]$.

8. Sean f_1, f_2 dos funciones acotadas definidas en un intervalo $[a,b]$. Demostrar que $\underline{\int_a^b} f_1(x)\,dx + \underline{\int_a^b} f_2(x)\,dx \leq \underline{\int_a^b}(f_1 + f_2)(x)\,dx$.
Sugerencia: Demuestra primero que

$$\inf\{f_1(x) : x \in [a,b]\} + \inf\{f_2(x) : x \in [a,b]\} \leq \inf\{f_1(x) + f_2(x) : x \in [a,b]\}$$

.

9. Demostrar que la función $f(x) = \cos(\frac{\pi}{x})$ para $0 < x \leq 1$, y tal que $f(0) = 0$, es integrable en $[0,1]$.

10. Demostrar que si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es acotada y tiene un número finito de discontinuidades, entonces f es integrable en $[a,b]$.
Sugerencia: Utiliza el ejercicio **5.**