Cálculo Diferencial e Integral II 2020-2
Profra: Dra. Judith Campos Cordero Ayudantes: Jonathan Giovanni Gil Juárez
Manuel Alejandro Zúñiga Pérez

Tarea 3

1. Dar un ejemplo de una función integrable $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ con $h(x) > 0$ para toda x, pero tal que $1/h$ no sea integrable en $[0,1]$.

2. Demostrar que si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua y $f(x) > 0$ para todo $x \in [a,b]$, entonces $1/f$ es integrable en $[a,b]$.

3. Sea $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ la función de Dirichlet definida como

$$f(x) := \begin{cases} 0 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 \text{ si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Demuestra que f no es integrable.

4. Dar un ejemplo de una función $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ que no sea integrable en $[0,1]$ pero tal que $|f|$ sea integrable en $[0,1]$.
Sugerencia: Modifica la función del ejercicio anterior.

5. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable. Utiliza la desigualdad

$$|f(x)| - |f(y)| \leq |f(x) - f(y)|$$

para demostrar que la función $|f|$ también es integrable en $[a,b]$.

6. Si f y g son dos funciones integrables en $[a,b]$, demuestra que la función

$$h(x) := \text{máx}\{f(x), g(x)\}$$

es integrable en $[a,b]$.

7. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable y sea $k > 0$. Demuestra que, entonces, kf es una función integrable y que $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$.

8. Demuestra que si $f\colon [a,b]$ es integrable en $[a,b]$ y si $0 \leq m \leq f(x) \leq M$ para toda $x \in [a,b]$, entonces

$$m \leq \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq M.$$

9. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y tal que $f(x) \geq 0$ para toda $x \in [a,b]$. Demuestra que existe $c \in (a,b)$ tal que

$$f(c) = \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

10. Considera la función de Thomae, definida en el intervalo $[0,1]$ como

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{q} \text{ si } x \in \mathbb{Q},\ x = \frac{p}{q} \text{ fracción irreducible} \\ 0 \text{ si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Demuestra que f es integrable en $[0,1]$ y que $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$.