Universidad Nacional Autónoma de México **Facultad de Ciencias**

Cálculo Diferencial e Integral II 2020-2
Profra: Dra. Judith Campos Cordero
Ayudantes: Jonathan Giovanni Gil Juárez
Manuel Alejandro Zúñiga Pérez

Tarea 4

1. Si F_1 y F_2 son antiderivadas de una función $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, demostrar que $F_1 - F_2$ es una función constante.

2. Sea $G(x) := x^2 \sin(\frac{k}{x^2})$ para $0 < x \leq 1$, y $G(0) := 0$. Demostrar que la derivada $g(x) := G'(x)$ existe para toda $x \in [0,1]$, pero que g no está acotada y, en consecuencia, no es integrable. (Por tanto, g tiene una antiderivada en $[0,1]$, pero no es integrable en este intervalo.) Sin embargo, demostrar que existe $\lim_{a\to 0^+} \int_a^1 g(x)\,dx$.

3. Sea $K(x) := x^2 \sin(\frac{\pi}{x})$ para $0 < x \leq 1$ y $K(0) := 0$. Demostrar que $k(x) := K'(x)$ es integrable en $[0,1]$ aún cuando es discontinua en $x = 0$. Calcular $\int_0^1 k(x)\,\mathrm{d}x$.

4. Sea f una función continua en $[a,b]$ y sea $H\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definida como

$$H(x) := \int_x^b f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Encuentra $H'(x)$ para $x \in [a,b]$.

5. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y sea $v\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ derivable en $[c,d]$ tal que $v[c,d] \subseteq [a,b]$. Demuestra que si $G\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ está definida por

$$G(x) := \int_a^{v(x)} f(y)\,\mathrm{d}y,$$

entonces $G'(x) = (f \circ v)(x)v'(x)$ para toda $x \in [c,d]$.

6. Encontrar F' para las siguientes funciones F definidas en el intervalo $[0,1]$.

(i) $F(x) := \int_0^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$;

(ii) $F(x) := \int_0^{x^2} (1-t^3)^{-1}\,\mathrm{d}t$;

(iii) $F(x) := \int_{x^2}^x \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$;

(iv) $F(x) := \int_0^{\cos(x)} \cos(t)\,\mathrm{d}t$.

7. Supongamos que $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua y tal que, para toda $x \in [a,b]$,

$$\int_a^x f(y)\,dy = \int_x^a f(y)\,dy.$$

Demostrar que $f(x) = 0$ para toda $x \in [a,b]$.

8. Sea $f\colon [-a,a] \to \mathbb{R}$ una función integrable, con $a > 0$. Demuestra lo siguiente:

(a) Si f es par, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

(b) Si f es impar, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$.

9. Demostrar que
$$\int_0^x \frac{\sin(t)}{t+1}\,dt > 0$$
para todo $x > 0$.

10. Calcula las siguientes integrales, justificando cada paso.

(i) $\int_0^1 t\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$;

(ii) $\int_0^3 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$;

(iii) $\int_1^3 \frac{1}{t\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t$;

(iv) $\int_1^2 \frac{\sqrt{t-1}}{t}\,\mathrm{d}t$;

11. Hallar las áreas de las regiones limitadas por las siguientes curvas:

(i) la gráfica de $f(x) = x^2$ y la gráfica de $g(x) = \frac{x^2}{2} + 2$;

(ii) la gráfica de $f(x) = x^2$ y la gráfica de $g(x) = -x^2$, con $x \in [-1, 1]$;

(iii) la gráfica de $f(x) = x^2$, la gráfica de $g(x) = x^2 - 2x + 4$, y el eje vertical;

(iv) las gráficas de $f(x) = x^2$, $g(x) = 1 - x^2$ y $h(x) = 2$;

(v) la gráfica de $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, el eje horizontal, y la recta vertical que pasa por $(2, 0)$.

12. Demostrar que
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx.$$
¿Cuál es la interpretación geométrica de este enunciado?

13. Demostrar que
$$\int_{ca}^{cb} f(x)\,dx = c\int_a^b f(cx)\,dx.$$

14. Dando por hecho que el área del círculo unitario, descrito por la ecuación $x^2 + y^2 = 1$, es igual a π, utilizar el ejercicio anterior para demostrar que el área de una elipse descrita por la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ es $ab\pi$.

15. Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable en $[a, b]$ y sea $c \in (a, b)$. Considérese la función
$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt, \quad \text{con } x \in [a, b].$$

Proporcionar una demostración o un contraejemplo para cada una de las siguientes afirmaciones:

(a) Si f es derivable en c, entonces F es derivable en c;

(b) Si f es derivable en c, entonces F' es continua en c y F' existe en un intervalo que contiene a c;

(c) Si f' es continua en c y existe en un intervalo que contiene a c, entonces F' es continua en c y existe en un intervalo que contiene a c.

16. Demostrar que los valores de las expresiones siguientes no dependen de x:

(i) $\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt + \int_0^{1/x} \frac{1}{1+t^2}\,dt$;

(ii) $\int_{-\cos(x)}^{\sin(x)} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$.

17. Hallar, sin hacer muchos cálculos, una función F tal que $F'''(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2(x)}}$.

18. Se dice que una función f es periódica con periodo a, si $f(x) = f(x+a)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(a) Si f es una función periódica con periodo a e integrable en $[0, a]$, demostrar que, para todo $b \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_b^{a+b} f(x)\,dx.$$

(b) Hallar una función f tal que f no sea periódica, pero que f' sí lo sea. *Sugerencia:* Elegir una g periódica para la cual pueda asegurarse que $\int_0^x g$ no sea periódica.

(c) Supóngase que f' es periódica con periodo a. Demostrar que f es periódica si y sólo si $f(a) = 0$.

19. **Resuelve las siguientes preguntas del Capítulo 18 del libro *Calculus*, de Spivak** (Segunda edición en español): $1-9$, 12, $14-16$, $18-21$, 25, 49, $50, 51$.

20. Para cada una de las integrales siguientes, establecer si es impropia y por qué. Así mismo, determinar si es convergente o divergente y, en caso de que sea **convergente**, determinar su valor:

(i) $\int_0^1 \log(x)\,dx$;

(ii) $\int_1^2 \frac{1}{x\log(x)}\,dx$;

(iii) $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$;

(iv) $\int_0^1 x\log(x)\,dx$;

(v) $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$;

(vi) $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{e^x}}\,dx$;

(vii) $\int_2^\infty \frac{\log(x)}{x}\,dx$;

(vii) $\int_2^\infty \frac{1}{x\log^2(x)}\,dx$;

(viii) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

(ix) $\int_{-\infty}^\infty e^{-x}\,dx$;

(x) $\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$;

(xi) $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+4)}\,dx$;