

Tarea 5

1. Calcula el polinomio de Taylor de las siguientes funciones en el grado indicado y en torno al punto indicado. Expresa el residuo en la forma de Lagrange y en la forma integral.

- (i) $f(x) = \sin(x^2) - \sin(x)^2$, grado 4 en 0;
- (ii) $f(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$, grado 4 en 0;
- (iii) $f(x) = e^{e^x}$, grado 3 en 0;
- (iv) $f(x) = \sin(x)$, grado $2n$ en $\frac{\pi}{2}$;
- (v) $f(x) = \cos(x)$, grado $2n$ en π .
- (vi) $f(x) = x^5 + x^3 + x$, grado 4, en 0;
- (vii) $f(x) = x^5 + x^3 + x$, grado 4, en 1;
- (viii) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, grado $2n + 1$, en 0.

2. Escribe cada uno de los siguientes polinomios en x como polinomios en $(x - 3)$. (Basta calcular el polinomio de Taylor en 3, del mismo grado que el polinomio original. ¿Por qué?)

- (i) $x^2 - 4x - 9$;
- (ii) $x^4 - 12x^3 + 44x^2 + 2x + 1$;
- (iii) $ax^2 + bx + c$;

3. Considera la función

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

¿Cuál es el máximo grado de polinomio de Taylor que es posible calcular para f si consideramos la forma del residuo de Lagrange? Justifica tu respuesta.

4. Calcular e con siete cifras decimales correctas.
5. Escribir una suma utilizando la notación Σ que sea igual a cada uno de los siguientes números con el grado de aproximación que se especifica.

- (i) $\sin(1)$ con error $< 10^{-17}$;
- (ii) e^2 con error $< 10^{-5}$.

6. (i) Demostrar que

$$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \tan(y)}$$

siempre que $x \neq y$ y, además, x , y y $x + y$ no sean de la forma $k\pi/2$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. (Utilizar las fórmulas de la suma para \sin y \cos).

(ii) Demostrar que

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

indicando las restricciones necesarias para x y y . (Indicación: Sustituir x por $\arctan(x)$ y y por $\arctan(y)$ en el inciso (i)).

(iii) Demostrar que

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}, \\ \frac{\pi}{4} &= 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}.\end{aligned}$$

(iv) Demostrar que $\pi = 3.14159\dots$, es decir, que π es un número cuya parte entera es 3 y obtener sus primeros 5 decimales. (Indicación: Aplicar la segunda expresión obtenida en el inciso anterior).

7. Supóngase que a_i son los coeficientes de los polinomios de Taylor en torno a a de la función f y supóngase que f es integrable en el intervalo $[a, b]$. En otras palabras, $a_i = f^{(i)}(a)/i!$. Encuentra los coeficientes c_i del polinomio de Taylor en torno a a de la función

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

8. (i) Demostrar que el polinomio de Taylor de $f(x) = \sin(x^2)$ de grado $4n+1$ en 0 es

$$x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}.$$

Indicación: Si P es el polinomio de Taylor de grado $2n+1$ para $\sin(x)$ en torno a 0, entonces $\sin(x) = P(x) + R(x)$, donde $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{R(x)}{x^{2n+1}} = 0$. ¿Qué implica esto para $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{R(x^2)}{x^{4n+2}}$?

(ii) Hallar $f^{(k)}(0)$ para todo $k \in \mathbb{N}^+$.

(iii) En general, si $f(x) = g(x^n)$, hallar $f^{(k)}(0)$ en términos de las derivadas de g en 0.

9. Supongamos que la función $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ satisface las siguientes condiciones:

(i) f y f' son continuas en $[0, 1]$ y f'' existe en $(0, 1)$;

(ii) $f'(0) = f'(1) = 0$;

(iii) $|f''(x)| \leq 1$ para todo $x \in (0, 1)$.

Demuestra que entonces $|f(\frac{1}{2}) - f(0)| \leq \frac{1}{8}$ y que $|f(1) - f(0)| \leq \frac{1}{4}$.

10. Sea $f(x) := e^x$. Demuestra que el término correspondiente al residuo en el Teorema de Taylor converge a 0 cuando $n \rightarrow \infty$ para cada x_0 predeterminada y para cada x .

11. (i) Supóngase que f es dos veces derivable en $(0, \infty)$ y que M_0 es una constante tal que $|f(x)| \leq M_0$ para todo $x > 0$, mientras que M_2 es una constante tal que $|f''(x)| \leq M_2$ para todo $x > 0$. Demostrar que, para todo $x > 0$ y para todo $h > 0$ se cumple que

$$|f'(x)| \leq \frac{2}{h}M_0 + \frac{h}{2}M_2.$$

- (ii) Bajo las hipótesis del inciso anterior, demostrar que para todos los $x > 0$ se tiene que

$$|f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

- (iii) Demostrar que, si f es dos veces derivable en $(0, \infty)$, f'' es acotada y $f(x)$ tiende a 0 cuando $x \rightarrow \infty$, entonces también $f'(x)$ tiende a 0 cuando $x \rightarrow \infty$.

12. (i) Utiliza el polinomio de Taylor para demostrar que si $f''(x_0)$ existe, entonces

$$f''(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2}.$$

El límite de la derecha se denomina la *segunda derivada de Schwarz* de f en x_0 .

- (ii) Sea $f(x) = x^2$ para $x \geq 0$ y $f(x) = -x^2$ para $x \leq 0$. Demostrar que existe la segunda derivada de Schwarz de f en 0 pero que no existe $f''(0)$.
- (iii) Demostrar que si f tiene un máximo local en x_0 , entonces la segunda derivada de Schwarz en x_0 es ≤ 0 .

13. (i) Demuestra por inducción la regla de Leibniz para la n -ésima derivada de un producto:

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x).$$

- (ii) Considera la función

$$h(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Demuestra que $h^{(n)}(0) = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Concluye que el término correspondiente al residuo del teorema de Taylor para $x_0 = 0$ **no** converge a cero cuando $n \rightarrow \infty$ para $x \neq 0$.

Sugerencia: Utiliza el inciso anterior para calcular $h^{(n)}(x)$ para $x \neq 0$. Observa además que, por L'Hôpital, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{x^k} = 0$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$ y cualquier $x \neq 0$.