

**Tarea 5**

1. Calcula el polinomio de Taylor de las siguientes funciones en el grado indicado y en torno al punto indicado. Expresa el residuo en la forma de Lagrange y en la forma integral.
  - (i)  $f(x) = \sin(x^2) - \sin(x)^2$ , grado 4 en 0;
  - (ii)  $f(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ , grado 4 en 0;
  - (iii)  $f(x) = e^{e^x}$ , grado 3 en 0;
  - (iv)  $f(x) = \sin(x)$ , grado  $2n$  en  $\frac{\pi}{2}$ ;
  - (v)  $f(x) = \cos(x)$ , grado  $2n$  en  $\pi$ .
  - (vi)  $f(x) = x^5 + x^3 + x$ , grado 4, en 0;
  - (vii)  $f(x) = x^5 + x^3 + x$ , grado 4, en 1;
  - (viii)  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ , grado  $2n+1$ , en 0.
  
2. Escribe cada uno de los siguientes polinomios en  $x$  como polinomios en  $(x - 3)$ . (Basta calcular el polinomio de Taylor en 3, del mismo grado que el polinomio original. ¿Por qué?)
  - (i)  $x^2 - 4x - 9$ ;
  - (ii)  $x^4 - 12x^3 + 44x^2 + 2x + 1$ ;
  - (iii)  $ax^2 + bx + c$ ;
  
3. Considera la función
 
$$f(x) = \begin{cases} x^4 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

¿Cuál es el máximo grado de polinomio de Taylor que es posible calcular para  $f$  si consideramos la forma del residuo de Lagrange? Justifica tu respuesta.
  
4. Calcular  $e$  con siete cifras decimales correctas.
  
5. Escribir una suma utilizando la notación  $\Sigma$  que sea igual a cada uno de los siguientes números con el grado de aproximación que se especifica.
  - (i)  $\sin(1)$  con error  $< 10^{-17}$ ;
  - (ii)  $e^2$  con error  $< 10^{-5}$ .
  
6. (i) Demostrar que
 
$$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$
 siempre que  $x \neq y$  y, además,  $x, y$  y  $x + y$  no sean de la forma  $k\pi/2$  para algún  $k \in \mathbb{Z}$ . (Utilizar las fórmulas de la suma para  $\sin$  y  $\cos$ .)

- (ii) Demostrar que

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

indicando las restricciones necesarias para  $x$  y  $y$ . (Indicación: Sustituir  $x$  por  $\arctan(x)$  y  $y$  por  $\arctan(y)$  en el inciso (i)).

- (iii) Demostrar que

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}, \\ \frac{\pi}{4} &= 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}.\end{aligned}$$

- (iv) Demostrar que  $\pi = 3.14159\dots$ , es decir, que  $\pi$  es un número cuya parte entera es 3 y obtener sus primeros 5 decimales. (Indicación: Aplicar la segunda expresión obtenida en el inciso anterior).

7. Supóngase que  $a_i$  son los coeficientes de los polinomios de Taylor en torno a  $a$  de la función  $f$  y supóngase que  $f$  es integrable en el intervalo  $[a, b]$ . En otras palabras,  $a_i = f^{(i)}(a)/i!$ . Encuentra los coeficientes  $c_i$  del polinomio de taylor en torno a  $a$  de la función

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

8. (i) Demostrar que el polinomio de Taylor de  $f(x) = \sin(x^2)$  de grado  $4n+1$  en 0 es

$$x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}.$$

Indicación: Si  $P$  es el polinomio de Taylor de grado  $2n+1$  para  $\sin(x)$  en torno a 0, entonces  $\sin(x) = P(x) + R(x)$ , donde  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{R(x)}{x^{2n+1}} = 0$ . ¿Qué implica esto para  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{R(x^2)}{x^{4n+2}}$ ?

- (ii) Hallar  $f^{(k)}(0)$  para todo  $k \in \mathbb{N}^+$ .

- (iii) En general, si  $f(x) = g(x^n)$ , hallar  $f^{(k)}(0)$  en términos de las derivadas de  $g$  en 0.

9. Supongamos que la función  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  satisface las siguientes condiciones:

- (i)  $f$  y  $f'$  son continuas en  $[0, 1]$  y  $f''$  existe en  $(0, 1)$ ;
- (ii)  $f'(0) = f'(1) = 0$ ;
- (iii)  $|f''(x)| \leq 1$  para todo  $x \in (0, 1)$ .

Demuestra que entonces  $|f(\frac{1}{2}) - f(0)| \leq \frac{1}{8}$  y que  $|f(1) - f(0)| \leq \frac{1}{4}$ .

10. Sea  $f(x) := e^x$ . Demuestra que el término correspondiente al residuo en el Teorema de Taylor converge a 0 cuando  $n \rightarrow \infty$  para cada  $x_0$  predeterminada y para cada  $x$ .

11. (i) Supóngase que  $f$  es dos veces derivable en  $(0, \infty)$  y que  $M_0$  es una constante tal que  $|f(x)| \leq M_0$  para todo  $x > 0$ , mientras que  $M_2$  es una constante tal que  $|f''(x)| \leq M_2$  para todo  $x > 0$ . Demostrar que, para todo  $x > 0$  y para todo  $h > 0$  se cumple que

$$|f'(x)| \leq \frac{2}{h} M_0 + \frac{h}{2} M_2.$$

- (ii) Bajo las hipótesis del inciso anterior, demostrar que para todos los  $x > 0$  se tiene que

$$|f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

- (iii) Demostrar que, si  $f$  es dos veces derivable en  $(0, \infty)$ ,  $f''$  es acotada y  $f(x)$  tiende a 0 cuando  $x \rightarrow \infty$ , entonces también  $f'(x)$  tiende a 0 cuando  $x \rightarrow \infty$ .

- 12.** (i) Utiliza el polinomio de Taylor para demostrar que si  $f''(x_0)$  existe, entonces

$$f''(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2}.$$

El límite de la derecha se denomina la *segunda derivada de Schwarz* de  $f$  en  $x_0$ .

- (ii) Sea  $f(x) = x^2$  para  $x \geq 0$  y  $f(x) = -x^2$  para  $x \leq 0$ . Demostrar que existe la segunda derivada de Schwarz de  $f$  en 0 pero que no existe  $f''(0)$ .  
 (iii) Demostrar que si  $f$  tiene un máximo local en  $x_0$ , entonces la segunda derivada de Schwarz en  $x_0$  es  $\leq 0$ .

- 13.** (i) Demuestra por inducción la regla de Leibniz para la  $n$ -ésima derivada de un producto:

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x).$$

- (ii) Considera la función

$$h(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Demuestra que  $h^{(n)}(0) = 0$  para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Concluye que el término correspondiente al residuo del teorema de Taylor para  $x_0 = 0$  **no** converge a cero cuando  $n \rightarrow \infty$  para  $x \neq 0$ .

*Sugerencia:* Utiliza el inciso anterior para calcular  $h^{(n)}(x)$  para  $x \neq 0$ . Observa además que, por L'Hôpital,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{x^k} = 0$  para cualquier  $k \in \mathbb{N}$  y cualquier  $x \neq 0$ .