Universidad Nacional Autónoma de México **Facultad de Ciencias**

Cálculo Diferencial e Integral II 2020-2
Profra: Dra. Judith Campos Cordero Ayudantes: Jonathan Giovanni Gil Juárez
Manuel Alejandro Zúñiga Pérez

Tarea 6

1. Utiliza el criterio de comparación o el de límite, según convenga, para determinar cuáles de las siguientes series son convergentes y cuáles son divergentes.

(I) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\theta)}{n^2}$.
(II) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2-1}}$.
(III) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$.
(IV) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log(n)}$.
(V) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log(n))^k}$, para alguna $k \in \mathbb{N}^+$.
(VI) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log(n))^n}$.
(VII) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$.
(VIII) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(\frac{1}{n})$.
(IX) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2\log(n)}$.

2. Utiliza el criterio del cociente para determinar cuáles de las siguientes series son convergentes y cuáles son divergentes.

(I) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$.
(II) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.
(III) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$.
(IV) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$.

3. Utiliza el criterio de la integral para determinar cuáles de las siguientes series son convergentes y cuáles son divergentes.

(I) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n)}{n}$.
(II) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log(n)}$.
(III) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log(n))^2}$.

4. (a) Sea $p \in \mathbb{N}^+$ un natural positivo fijo. Considera las sumas parciales para probar que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+p)}$$

converge al número

$$\frac{\sum_{j=1}^{p} \frac{1}{j}}{p}.$$

(b) Determina si la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k)}{2^k}$$

es convergente.

(c) Utiliza el criterio de comparación para probar que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{(k+1)(k+2)^2}$$

es convergente.

5. Sea (a_n) una sucesión real tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente. Considera las sumas parciales

$$s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n \quad \text{y} \quad S_n = |a_1| + |a_2| + ... + |a_n|$$

y utilízalas para demostrar que

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

6. Definimos al número e como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Demuestra que la sucesión de sumas parciales consta de números positivos y que es monótona creciente y acotada. Concluye que el número e, definido como dicho límite, existe.
Sugerencia para encontrar una cota superior: Compara con una suma de una progresión geométrica adecuada.

7. Demuestra que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$ es convergente.

8. Determina para cada una de las siguientes afirmaciones si ésta es verdadera o falsa. Da prueba o contraejemplo según sea el caso.

(a) Si $k^2 a_k \to 0$, entonces $\sum a_k$ es convergente.

(b) Si $\sum a_k$ es convergente, entonces $\sum a_k^2$ es convergente.

(c) Si $\sum a_k$ converge absolutamente, entonces $\sum a_k^2$ es convergente.

(d) Si $\sum a_k^2$ es convergente, entonces $\sum a_k^3$ es convergente.

9. Para las siguientes sucesiones (a_k), determina si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente.

(a) $a_k := \frac{(2k+1)(3k-1)}{(k+1)(k+2)^2}$;

(b) $a_k := \frac{1}{k^{1/k} k}$;

(c) $a_k := \binom{2k}{k}^{-1} (4 - 10^{-23})^k$.

10. Para cada una de las siguientes series de potencias de la forma $\sum c_k x^k$, determina cuál de las siguientes opciones es verdadera:

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k x^k|$ converge para todo $x \in \mathbb{R}$;

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k x^k|$ converge sólo para $x = 0$;

(iii) existe un $R > 0$ tal que si $|x| < R$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k x^k|$ converge y si $|x| > R$, entonces la serie diverge. En este caso, determina cuál es el $R > 0$ para el que esto ocurre.

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} k^{2020} x^k$;

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{2^k k^4}$;

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k x^{k!}$;

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} k^k x^k$.

11. **Criterio de la raíz n-ésima para convergencia de series.** Sea (a_n) una sucesión tal que existe el límite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$$

con $L \in \mathbb{R}$.

Demuestra que:

(a) Si $0 \leq L < 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente.

(b) Si $L > 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

(c) Construye sucesiones (a_n) y (b_n) para mostrar que, si el límite anterior es tal que $L = 1$, puede ocurrir tanto que la serie converga absolutamente, como que no converja.

12. Demuestra que la integral $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\, dx$ es convergente pero que $\int_0^{\infty} \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x}\, dx$ diverge.
Sugerencia:

a) Para demostrar que si $a > 1$ está fijo entonces la integral impropia $\int_a^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\, dx$ es convergente, utiliza la fórmula de integración por partes para mostrar que, para cualquier $b > a$,

$$\int_a^b \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\, dx = \frac{\cos(a)}{a} - \frac{\cos(b)}{b} - \int_a^b \frac{\cos(x)}{x^2}\, dx.$$

Luego, toma límite cuando $b \to \infty$. Puede ser útil observar primero cómo es $\int_a^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$.

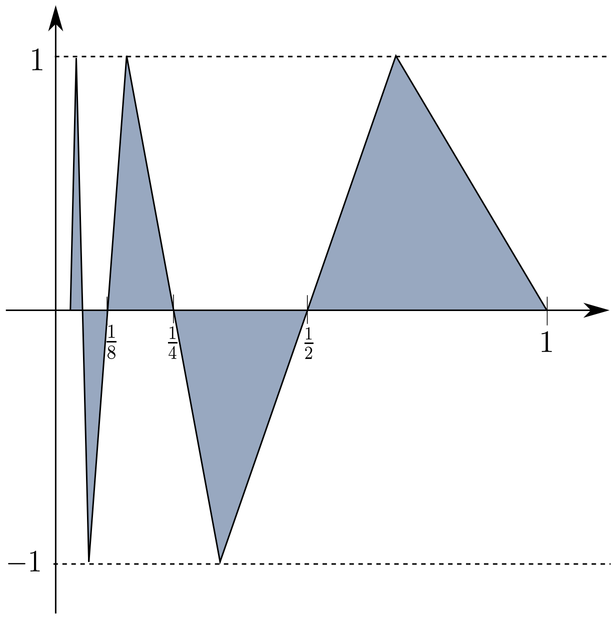
b) Para demostrar que si $b > 0$ está fijo entonces la integral $\int_0^b \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\, dx$ existe, observa que $\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ es una función que coincide en el intervalo $(0, b]$ con una función que es continua en $[0, b]$. (¿Quién es esa función?).

c) Para demostrar que $\int_0^{\infty} \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x}\, dx$ es divergente, utiliza el inciso (a) para mostrar primero que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{(2k-\frac{1}{2})\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x}\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(2k-\frac{1}{2})\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\, dx = \infty.$$

13. Encontrar una función $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ con $f(x) \geq 0$ para todo x, tal que $\int_0^{\infty} f(x)\, dx$ existe pero no existe $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

14. Sea f la función cuya gráfica es la de la siguiente figura. Encuentra $\int_0^1 f(x)\, dx$ y también el área de la región sombreada.



1
−1
$\frac{1}{8}$
$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{2}$
1