Contenido:

1. Conclusión y ejemplos del tema de Integrales impropias.

2. Teorema de Valor Medio para Integrales.

Integrales impropias.

① Si $f : [a,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, decimos que existe $\int_a^{\infty} f(x)dx$ sii $\exists \lim_{c\to\infty} \int_a^c f(x)dx$. y, en ese caso, llamamos $\int_a^{\infty} f := \lim_{c\to\infty} \int_a^c f$.

Ej: $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}$.

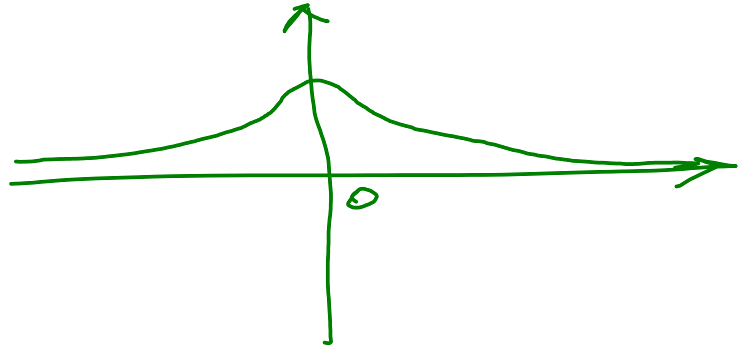
$f(x) = x$
es acotada en $[a,c]$
$\forall a, c \in \mathbb{R}$.
No es ac. en $[a,\infty)$.

---

② Si $f : (-\infty, a] \longrightarrow \mathbb{R}$, decimos que $\exists \int_{-\infty}^{a} f$ sii $\exists \lim_{c\to-\infty} \int_c^a f(x)dx$.

Llamamos $\int_{-\infty}^{a} f := \lim_{c\to-\infty} \int_c^a f(x)dx$

Ej: $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$.



En el examen:

Si f es acotada en $[a,b]$ y es int. en $[c,b]$ $\forall c \in (a,b]$. Si $\exists \lim_{c \to a} \int_c^b f$

Ent. f es int en $[a,b]$ y $\int_a^b f = \lim_{c \to a} \int_c^b f$.

---

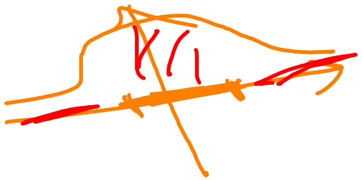
③ Si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Decimos que

$\exists \int_{-\infty}^{\infty} f\,dx$ sii $\begin{cases} ① \ \exists \int_a^{\infty} f(x)\,dx \quad \forall a \in \mathbb{R} \\ \quad y \\ ② \ \exists \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx \quad \forall a \in \mathbb{R}. \end{cases}$

En ese caso, def $\int_{-\infty}^{\infty} f := \int_{-\infty}^{a} f + \int_a^{\infty} f$.

Ej: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

$\int_a^b \frac{1}{1+x^2}\,dx < \infty$

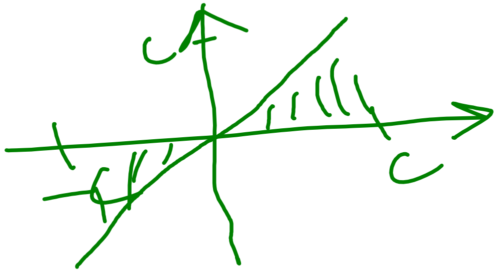


$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$

¿Será equivalente a la def. de que $\exists \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$, pedir que exista $\lim_{c \to \infty} \int_{-c}^{c} f(x)\,dx$?

¡¡NO!! Ejemplo: $f(x) = x$.

Si $c \in \mathbb{R}$ es arbitrario: $\int_{-c}^{c} f(x)\,dx = \int_{-c}^{c} x\,dx = 0$



$\therefore \exists \lim_{c \to \infty} \int_{-c}^{c} x\,dx = \lim_{c \to \infty} 0 = 0.$

Sin embargo, $\nexists \int_{-\infty}^{\infty} x\,dx$, pues

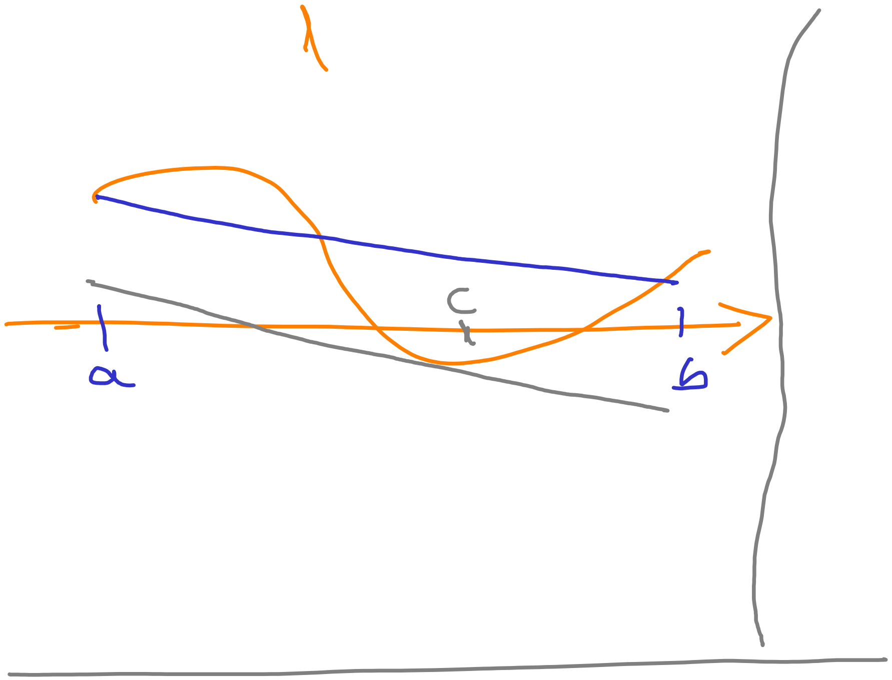
$$\int_{-\infty}^{0} x\,dx = \lim_{c\to-\infty} \int_{c}^{0} x\,dx = \lim_{c\to-\infty} \left.\frac{x^2}{2}\right|_{c}^{0} =$$

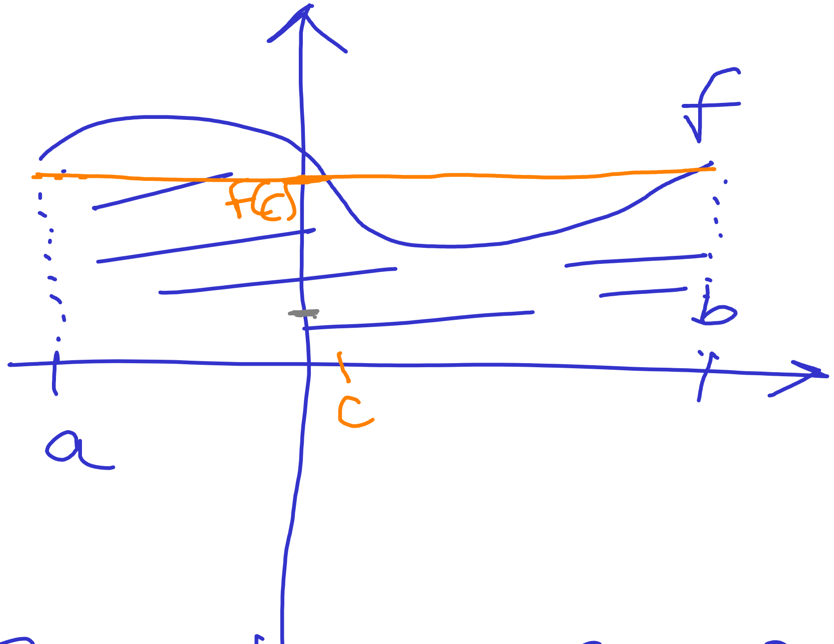
$$\lim_{c\to-\infty} 0-\frac{c^2}{2} = \lim_{c\to-\infty} -\frac{c^2}{2} \longrightarrow$$ ¡no existe!

$$\therefore \nexists \int_{-\infty}^{0} x\,dx \text{ y, ent. } \nexists \int_{-\infty}^{\infty} x\,dx.$$

$$\nexists \lim_{c\to\infty} \int_{-c^2}^{c} x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-c^2}^{c} = \lim_{c\to\infty} \frac{c^2}{2} - \frac{c^4}{2}$$

Teorema del valor medio para integrales





Teo. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y sea $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ con ρ integrable en $[a,b]$ y t.q. $\rho(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$. Entonces: $\exists c \in [a,b]$ t.q.

$$\int_a^b f(x) \cdot \rho(x)\,dx = f(c) \cdot \int_a^b \rho(x)\,dx.$$

Corolario. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua, entonces
$$\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a)$$
para algún $c\in[a,b]$.

Dem: Sea $p:[a,b]\to\mathbb{R}$ la función constante $p\equiv 1$.
Ent. $p(x)\geq 0$ $\forall x\in[a,b]$. y, como p es constante ent p es int. en $[a,b]$.
Como f es continua, podemos aplicar el Teorema y concluimos que:
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)p(x)dx = f(c)\int_a^b 1\,dx$$
$$= f(c)(b-a).$$
para algún $c\in[a,b]$. ∎

Dems. Sup. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es cont y que $p:[a,b]\to\mathbb{R}$ es int. en $[a,b]$ y $p\geq 0$.

Como f es continua, existen:

$$m:=\min_{x\in[a,b]} f(x) \quad \text{y} \quad M:=\max_{x\in[a,b]} f(x).$$

Como $p(x)\geq 0$ $\forall x\in[a,b]$, ent.

$$m\cdot p(x)\leq f(x)\,p(x)\leq M\,p(x) \quad \forall x\in[a,b]$$

Int.
$$\int_a^b m\cdot p(x)\,dx\leq \int_a^b f(x)p(x)\,dx\leq \int_a^b M\cdot p(x)\,dx.$$

En el caso en que $\int_a^b p(x)\,dx>0$.

Ent, de lo ant:

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)p(x)\,dx}{\int_a^b p(x)\,dx} \leq M$$

Por $\boxed{\text{T.V.I para Func. cont.}}$

$\exists\, c \in [a,b]$ t.q.

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)p(x)\,dx}{\int_a^b p(x)\,dx}$$

$$\Longrightarrow f(c) \cdot \int_a^b p(x)\,dx = \int_a^b f(x)p(x)\,dx.$$

Ojo: El TVI se está usando como sigue:

Como m y M son respectivamente mínimo y máximo de f, entonces hay h y k en [a,b] tales que m=f(h) y M=f(k). S.p.g. suponemos que h<k.

El TVI se está aplicando en el intervalo [h,k] a la función f.

Para el caso en el que $\int_a^b p(x)\,dx = 0$, de *

se sigue que también $\int_a^b f \cdot p = 0$.

Ent. cualquier $c \in [a,b]$, cumple que

$$\int_a^b f(x)p(x)\,dx = 0 = f(c)\int_a^b p(x)\,dx.$$

En cualquier caso tenemos que

$\exists c \in [a,b]$ t.q.

$$\int_a^b f(x)\,p(x)\,dx = f(c)\cdot\int_a^b p(x)\,dx$$

$\blacksquare$