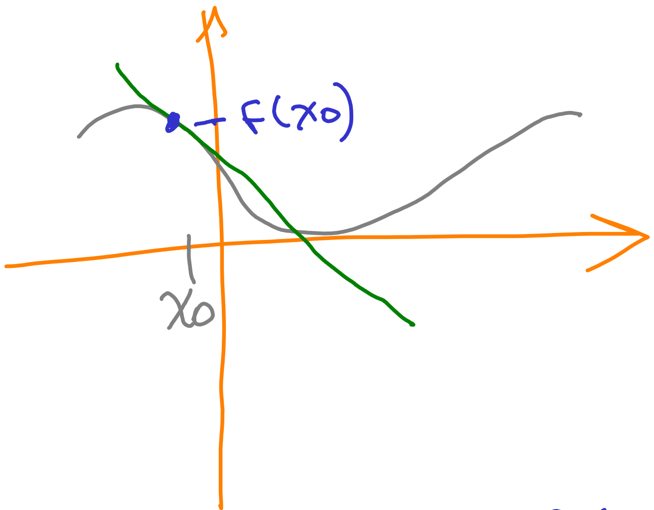
Teorema de Taylor.

Si f es derivable en x_0, la recta tangente a la gráfica de f en $(x_0, f(x_0))$.



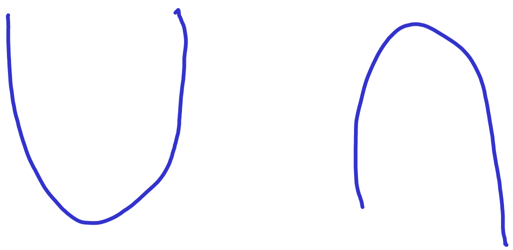
En este caso,

$$f(x) = \underline{f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)} + \varepsilon(x)(x-x_0).$$

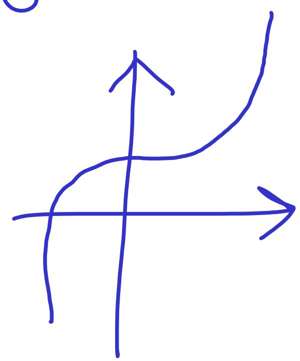
donde $\varepsilon(x) \to 0$ cuando $x \to x_0$.

con $$\varepsilon(x) := \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0).$$

Pols. de grado 2.



Pols. de grado 3.



Si $f(x)$ es una función derivable, su recta tangente en x_0 es $f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

- Si f es suficientemente derivable, el polinomio P_2: de grado 2 que "más se le parece" tiene que ser tal que $P_2(x_0)=f(x_0)$ y si

$$P_2(x) = a + b(x-x_0) + c(x-x_0)^2, \quad \text{ent.}$$

$$P_2(x_0) = \boxed{a = f(x_0)}.$$

$$P_2'(x) = b + 2c(x-x_0)$$

Queremos que P_2 se parezca a f. Podemos <u>requerir</u> que $P_2'(x_0) = f'(x_0)$

Sabemos que $P_2'(x_0) = b + 0 = b$. Entonces <u>queremos</u>

$$\boxed{b = f'(x_0)}.$$

$P_2''(x) = 2c.$

Queremos que $P_2''(x_0) = f''(x_0)$

Ent. queremos que $P_2''(x_0) = 2c = f''(x_0)$, i.e. $\boxed{c = \frac{f''(x_0)}{2}}$.

$$\therefore \boxed{P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2.}$$

Si $P_3(x) = a + b(x-x_0) + c(x-x_0)^2 + d(x-x_0)^3.$

$P_3(x_0) = f(x_0) = a$

$P_3'(x_0) = b = f'(x_0).$

$P_3''(x_0) = 2c = f''(x_0)$

$P_3'''(x_0) = d\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = d\cdot 3! = f'''(x_0).$

queremos

$$\Rightarrow d = \frac{f'''(x_0)}{3!}$$

$$\therefore \quad P_3'(x) = b + 2\cdot c(x-x_0) + 3\cdot d(x-x_0)^2.$$

$$P_3''(x) = 2c + 3\cdot 2\cdot d(x-x_0)$$

$$P_3'''(x) = 3\cdot 2\cdot d = 3!\, d$$

$$P_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3$$

Definición: Si f es una función n veces derivable en x_0, definimos su polinomio de Taylor de grado n, en torno a x_0, como el pol.

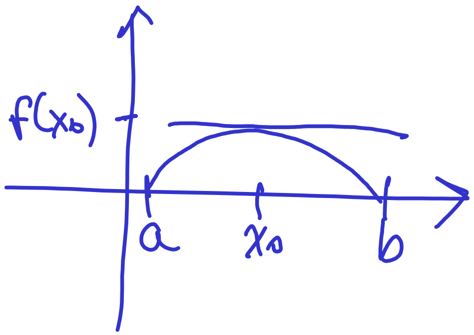
$$P_n(x) = \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Obs:

$$\left.\begin{aligned} P_n(x_0) &= f(x_0) \\ P_n'(x_0) &= f'(x_0) \\ P_n''(x_0) &= f''(x_0) \\ &\vdots \\ P_n^{(n)}(x_0) &= f^{(n)}(x_0). \end{aligned}\right\}$$

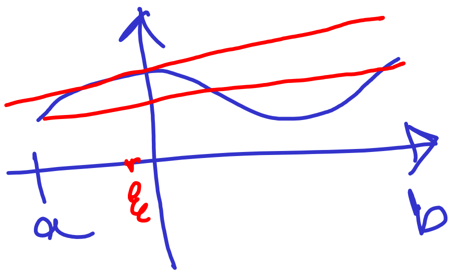
¿Qué pasa con $f(x) - P_{n,x_0}(x)$?

Teorema de Rolle:



Si $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ es cont en $[a,b]$ y derivable en (a,b), ent, si $F(a)=F(b)=0$, se sigue que $\exists\, x_0\in(a,b)$ t.q. $F'(x_0)=0$.

T.V.M.



Si $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ es cont. en $[a,b]$ y derivable en (a,b), ent $\exists\, \xi\in(a,b)$ t.q. $F'(\xi)=\dfrac{F(b)-F(a)}{b-a}$

Del T.V.M. se sigue que

$$F'(\xi)(x-a)+F(a)=F(x).$$

Teorema de Taylor con residuo en la forma de Lagrange.

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ t.q.

(i) $\exists\ f, f', f'', f''', \dots, f^{(n)}$ en $[a,b]$ y son continuas en $[a,b]$.

(ii) $f^{(n+1)}$ existe en (a,b).

Si $x_0 \in [a,b]$, ent. $\forall x \in [a,b]$ $\exists\ \xi_x$ entre x_0 y x t.q.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$+ \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Dems: Sean $x_0, x \in [a,b]$. S.p.g. sup que $x_0 < x$

Definimos a la función $F : [x_0, x] \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$F(t) := f(t) - P_{n,x_0}(t) - K\,(t-x_0)^{n+1}$$

$$= f(t) - f(x_0) - f'(x_0)(t-x_0) - \frac{f''(x_0)}{2!}(t-x_0)^2 - \dots$$

$$- \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(t-x_0)^n - K(t-x_0)^{n+1},$$

con K una constante aún por definir.

Obs: $F(x_0) = 0$.

Elegimos K t.q. $F(x) = 0$.

Ent, como F es cont. en $[x_0, x]$ y derivable en (x_0, x), podemos aplicar el Teo. de Rolle y encontramos un punto $\xi_1 \in (x_0, x)$

y es t.q. $F'(\xi_1)=0$.

Notemos que

$$F'(t)=f'(t)-f'(x_0)-f''(x_0)(t-x_0)-\dots - n\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(t-x_0)^{n-1}-K(n+1)(t-x_0)^n$$

$$=f'(t)-f'(x_0)-f''(x_0)(t-x_0)-\dots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(t-x_0)^{n-1}-K(n+1)(t-x_0)^n.$$

Obs. que $\boxed{F'(x_0)=0}$.

Ent., por Teo. de Rolle aplicado a F' en el int. $[x_0,\xi_1]$, se sigue que $\exists\,\xi_2\in(x_0,\xi_1)$

t.q. $F''(\xi_2) = 0$.

Se puede ver que $F''(x_0) = 0$.

Ent., podemos aplicar T. de Rolle nuevamente y, sucesivamente

$\exists\ \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}$ t.q.

$$x_0 < \xi_{n+1} < \xi_n < \dots < \xi_2 < \xi_1 < x.$$

t.q. $F^{(k)}(\xi_k) = 0$. para $k = 1, \dots, \underline{\underline{n+1}}$.

Sea $\xi := \xi_{n+1}$.

Nótese que

$$F^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - K(n+1)!$$

Ent, $F^{n+1}(\xi) = F^{n+1}(\xi_{n+1}) = 0$

$$= f^{(n+1)}(\xi) - K(n+1)!$$

$$\Rightarrow K = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Además sabemos que $F(x) = 0$, entonces

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

con $\xi \in (x_0, x)$.

$\blacksquare$