Ejemplo: Calcular una aproximación de $\sqrt[3]{1.3}$.

Sea $f(x) := \sqrt[3]{1+x}$. Queremos aprox. $\sqrt[3]{1.3} = f(0.3)$.

Calculamos:

$$f'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}.$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)(1+x)^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{3^2}(1+x)^{-\frac{5}{3}}.$$

$$f'''(x) = \frac{10}{3^3}(1+x)^{-\frac{8}{3}} = \frac{10}{3^3} \cdot \frac{1}{(1+x)^{8/3}}$$

El Pol. de Taylor de f en torno a $x_0 = 0$ y de grado 2:

$$P_{2,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2.$$

$$= 1 + \frac{1}{3}x + \left(-\frac{2}{3^2}\right)\frac{x^2}{2!}.$$

Aproximamos $f(0.3)$ con $P_{2,0}(0.3)$:

$$P_{2,0}(0.3) = 1 + \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{10} - \frac{\cancel{2}}{\cancel{3^2}} \cdot \frac{\cancel{3^2}}{10^2} \cdot \frac{1}{\cancel{2!}}$$

$$= 1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{100} = 1.1 - 0.01 = 1.09$$

$$\sqrt[3]{1.3} \approx 1.09.$$

El "error" en esta aproximación es llamado el <u>residuo</u> de f en torno al 0 de grado 2

$$R = f(0.3) - P_{2,0}(0.3) = \frac{f'''(\xi_{0.3})}{3!}(0.3)^3.$$

$$\xi_{0.3} \in (0, 0.3).$$

Sabemos que $f'''(x) = \frac{10}{33} \frac{1}{(1+x)^{8/3}} < \frac{10}{3^3}$

si $x > 0$.

$$\therefore\ R < \frac{10}{\cancel{3}^{3}} \cdot \frac{1}{3!}\left(\frac{\cancel{3}}{10}\right)^{3} = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{10^{3}}$$

$$= \frac{5}{3000} = \frac{1}{600} < \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{100}$$

$$= (0.2)\, 10^{-2}$$

$$= 0.002$$

$$\sqrt[3]{1,3} = 1,09 + \underbrace{R}_{0,00?}$$

$$= 1.09?$$

Aproximar el número $\underline{\underline{e}}$ con un error menor a $10^{-5} = \dfrac{1}{100000}$.

Sabemos que $\boxed{2 < e < 3}$.

Sea $f(x) = e^x$. Queremos aproximar $f(1) \doteq e$.

Pol. de Taylor en torno a $x_0 = 0$.

$$P_{n,0}(x) = f(0) + f'(0)(x) + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

$$= \boxed{1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!} \cdot x^n}.$$

$$f(1) \approx P_{n,0}(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n!}$$

Queremos que el error o residuo sea $< 10^{-5}$.

$$R = \frac{f^{(n+1)}(\xi_1)}{(n+1)!} \cdot 1^{n+1}, \text{ con } f^{(n+1)}(x) = e^x.$$

y $\xi_1 \in (0,1)$.

$$\therefore f^{(n+1)}(\xi_1) < f^{(n+1)}(1) = e$$

Como $e<3$, ent $R < \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-5}$

$= 0.00001$.

Queremos que $3 \cdot 10^{5} < (n+1)!$

Si $n=8$, $(n+1)! = 9! = 362\,880$.

Con $n=7$, no obtenemos $\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-5}$

y por tanto no podemos asegurar que $n=7$ sería suficiente.

$$P_{8,0}(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!}$$

$$= 2.71827877$$

$e \approx 2.71828$

$10^{-5} = \frac{1}{10^5} = 0.00001.$

Polinomio de Taylor de sen(x)

Con grado n y en torno a $x_0 = 0$.

$$P_{n,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

si $f(x) = \operatorname{sen}(x)$

$f'(x) = \cos(x)$

$f''(x) = -\operatorname{sen}(x)$

$f'''(x) = -\cos(x)$

$f^{(iv)}(x) = \operatorname{sen}(x).$

$f(0) = 0$

$f'(0) = 1$

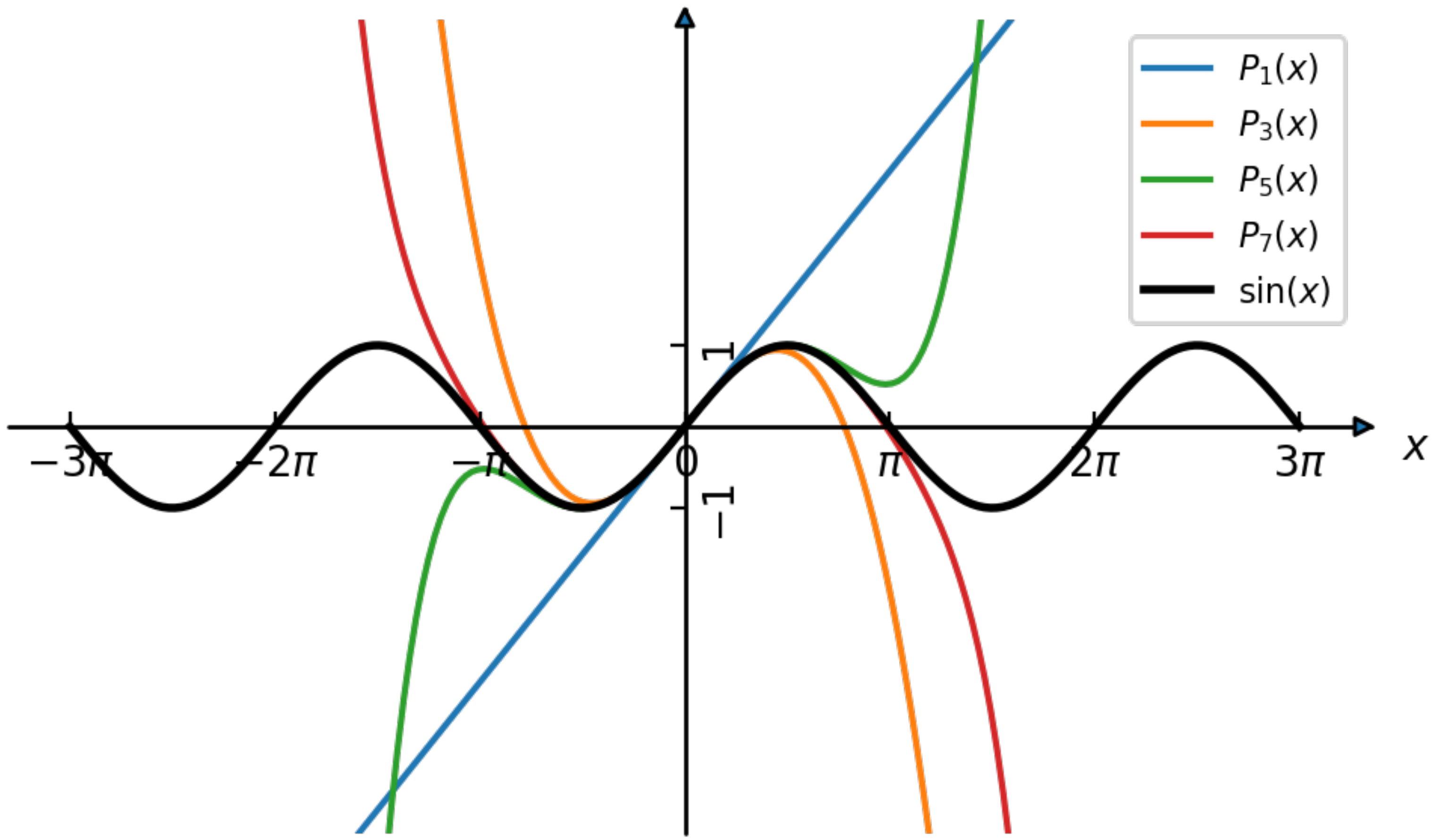
$f''(0) = 0$

$f'''(0) = -1$

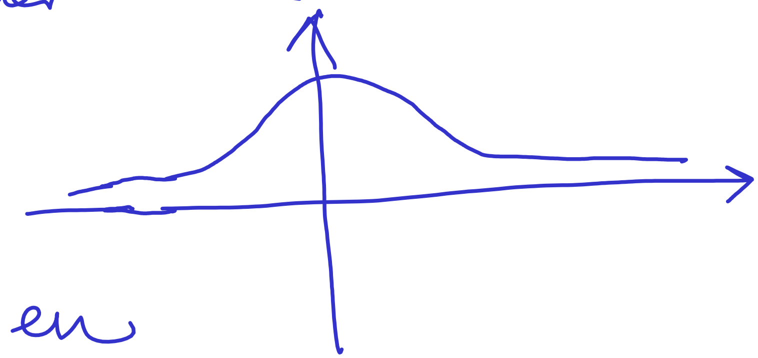
$f^{(iv)}(0) = 0$

Sea $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ es par} \\ \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} & \text{si } k = 2m+1. \end{cases}$

$$\therefore P_{2n+1,0}(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$



Otra aplicación de T. de Taylor es calcular integrales definidas de funciones para las que no sea posible obtener una antiderivada:



Ejemplos: e^{-x^2}

no tiene una antiderivada en términos de funciones elementales.

Para "aproximar" $\int_a^b e^{-x^2}\,dx$ podemos utilizar Taylor. y calcular $\int_a^b P_{n,0}(x)\,dx$.

$\operatorname{sen}(x^2)$, e^{x^2}, x^x, $\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}$.

Definición: Si f es una función como en el enunciado del T. de Taylor, si $n \in \mathbb{N}$ es t.q.

$$f(x) = P_{n,x_0}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

entonces llamamos al número $\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, el residuo de grado n de f en torno a x_0.

Lo denotamos como $\boxed{R_{\underline{n},x_0}(x)}$.

¿Qué tanto se parece f a P_{n,x_0} en general?

Para $n=1$:

$$P_{1,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0).$$

$$\frac{f(x) - P_{1,x_0}(x)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0.$$

$\therefore \lim_{x\to x_0} f(x) - P_{1,x_0}(x) = 0$ y el límite se va a cero más rápido que $x-x_0$.

Demostraremos que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_{n,x_0}(x)}{(x - x_0)^n} = 0 .$$