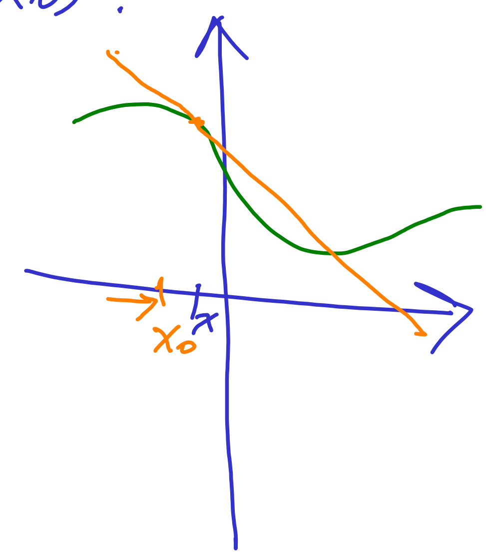
Recordatorio: Si f es diferenciable en x_0, ent. su polinomio de Taylor de grado 1 es:

$$P_{1,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0).$$

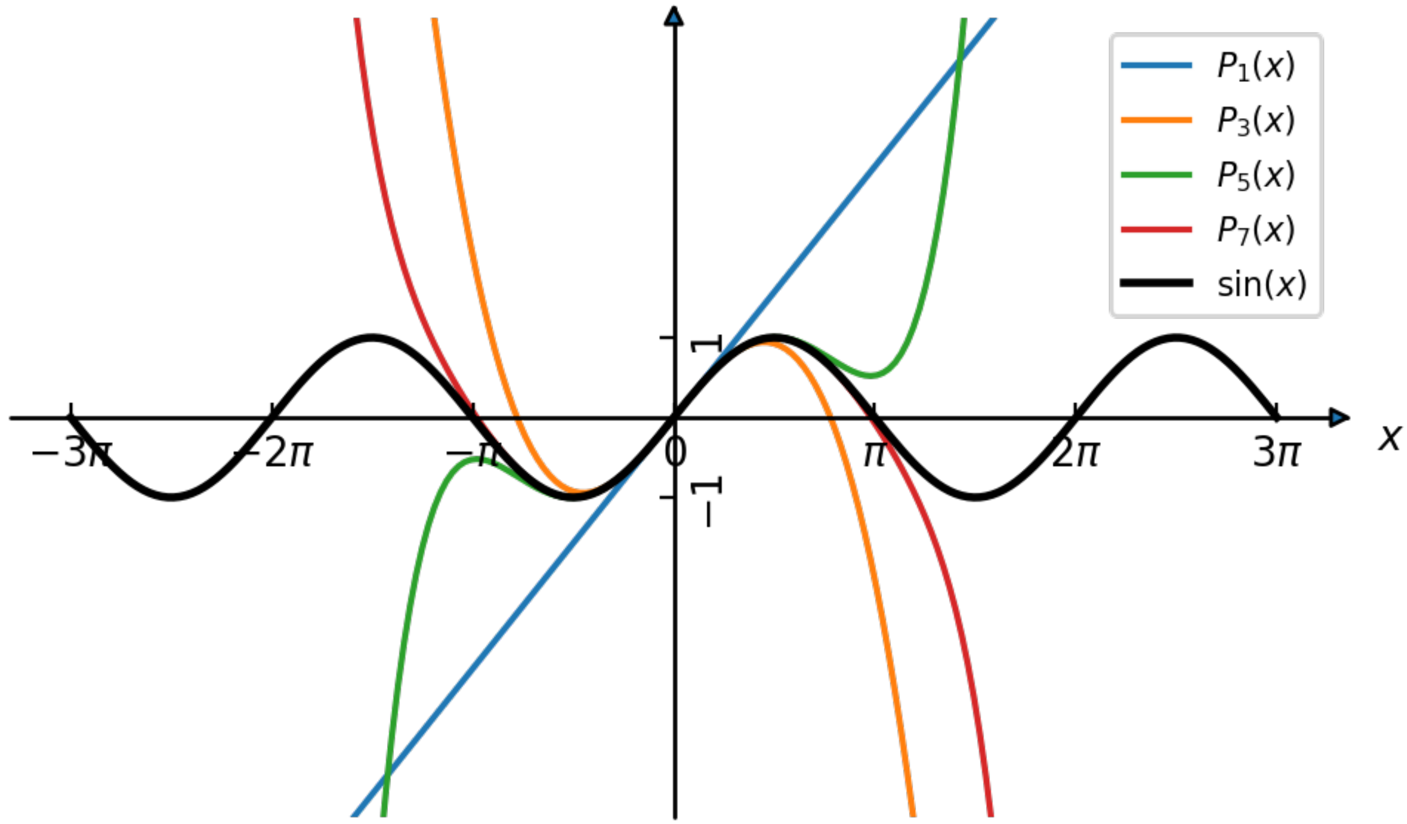


Ent:
$$\frac{f(x) - P_{1,x_0}(x)}{x-x_0} =$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)\frac{(x-x_0)}{x-x_0}$$

$$= \frac{f(x) - f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

¿Cómo es general $\dfrac{f(x) - P_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n}$?



Teorema: Sea f una función, $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ t.q. $\exists\, f'(x_0), f''(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$. De modo que

$$P_{n,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

es su pol. de Taylor de grado n.

Entonces:
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

En particular $\lim_{x \to x_0} f(x) - P_{n,x_0}(x) = 0$.

Dem: Calculemos primero:

$$\frac{f(x) - P_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}{(x-x_0)^n}.$$

$$= \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}{(x-x_0)^n} - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Sea $Q(x) := P_{n-1,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$

Calcularemos

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - Q(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Nótese que $\lim_{x \to x_0} f(x) - Q(x) = f(x_0) - Q(x_0)$

$$= f(x_0) - f(x_0)$$

$$= 0.$$

Recordemos que; como Q es pol. de Taylor de f:

$$Q(x_0) = f(x_0)$$

$$Q'(x_0) = f'(x_0)$$

$$Q''(x_0) = f''(x_0)$$

$$\vdots$$

$$Q^{(n-1)}(x_0) = f^{(n-1)}(x_0).$$

Por otro lado, sea $g(x) := (x-x_0)^n$.

Ent: $g'(x) = n(x-x_0)^{n-1}$.

$$g''(x) = n(n-1)(x-x_0)^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$g^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!}(x-x_0)^{n-k}.$$ para $1 \leq k \leq n-1$.

Además $\lim_{x\to x_0} f^{(k)}(x) - Q^{(k)}(x) = f^{(k)}(x_0) - Q^{(k)}(x_0)$

$= 0.$

para $1 \leq k \leq n-1$. y también

$$\lim_{x\to x_0} g^{(k)}(x) = 0.$$

¿Podemos aplicar L'Hôpital $n-1$ veces para obtener $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - Q(x)}{(x-x_0)^n}$?

Notemos que, en ese caso:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - Q(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - Q^{(n-1)}(x)}{n!\,(x-x_0)}.$$

Obs. que $Q^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x_0)$.

$$\therefore \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{n!\,(x-x_0)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Entonces, por L'Hôpital:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - Q(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

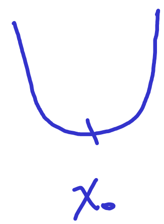
y, por tanto:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - P_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

$\blacksquare$

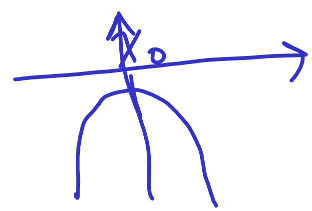
Máximos y mínimos locales.

Sabemos que · si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$



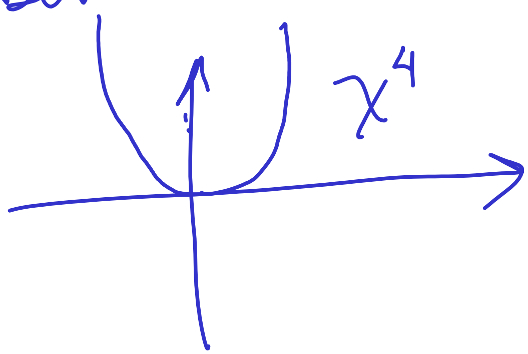
ent. f tiene un mín. local en x_0.

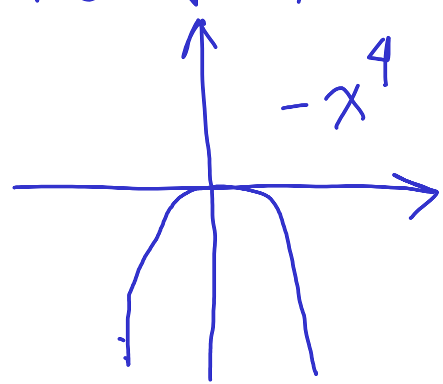
· si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$.

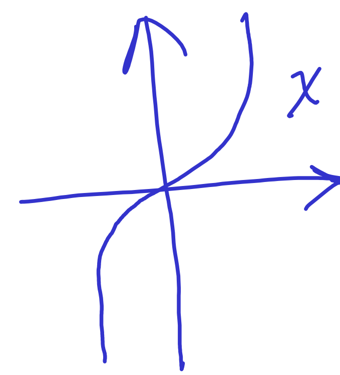


ent. f tiene un max. local en x_0.

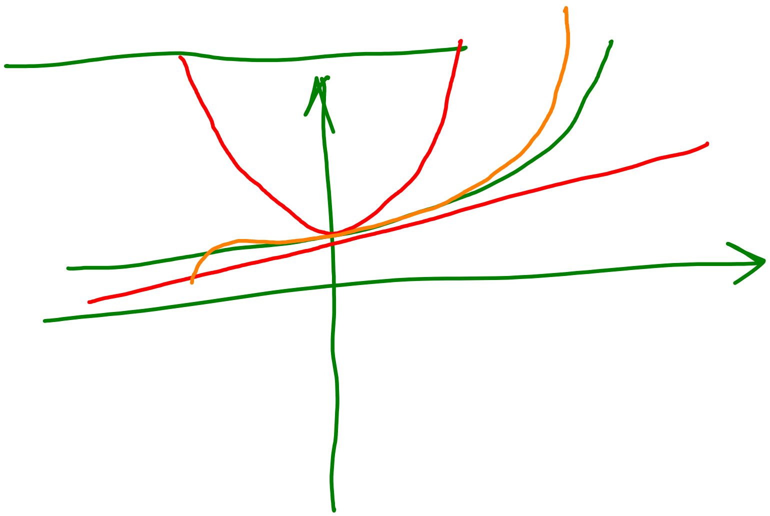
Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) = 0$, ent. no sabemos si hay o no max. o min. local en x_0.







$$\frac{d^4(x^4)}{dx^4} = 4! \qquad \frac{d(-x^4)}{dx^4} = -4!$$



<u>Teorema:</u> Sup que f es tal que

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

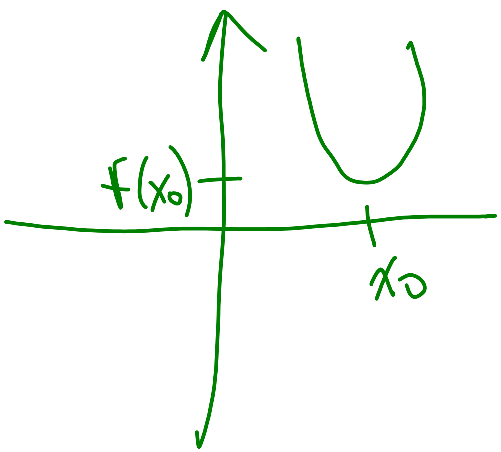
y que $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

(1) Si n es par y $f^{(n)}(x_0) > 0$ ent x_0 es un minimizante local.

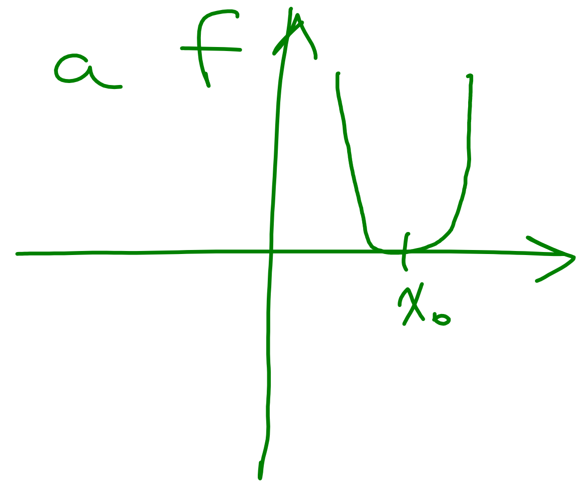
(2) Si n es par y $f^{(n)}(x_0) < 0$ ent. x_0 es un maximizante local de f.

(3) Si n es impar, ent. x_0 no es ni minimizante ni maximizante local de f.

Dem:



Restamos $f(x_0)$ a f



Sin perder generalidad, sup. que $f(x_0)=0$ (de otro modo podemos considerar a la traslación $f - f(x_0)$).

Entonces $P_{n,x_0}(x) = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ es el pol. de Taylor de grado n de f.

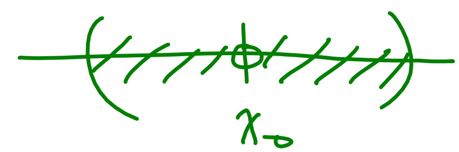
Por tanto, el Teorema anterior nos dice que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-P_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^n} - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

$$= 0.$$

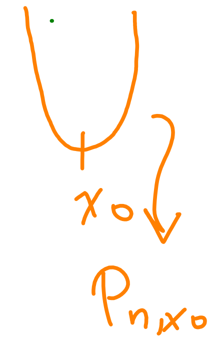
Entonces $$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \neq 0.$$

$\therefore \exists \delta>0 \quad \forall x \in \big((x_0-\delta, x_0+\delta)-\{x_0\}\big)$



$\dfrac{f(x)}{(x-x_0)^n}$ tiene el mismo signo que $f^{(n)}(x_0)$.

Caso 1: Si n es par y $f^{(n)}(x_0) > 0$.



Ent. $\dfrac{f(x)}{(x-x_0)^n} > 0$ y, por tanto, $f(x) > 0$

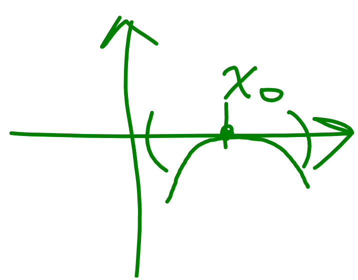
en $(x_0-\delta, x_0+\delta) - \{x_0\}$.

Como $f(x_0) = 0$, ent. x_0 es minim. local de f.

Caso 2: Si n es par y $f^{(n)}(x_0) < 0$, ent.

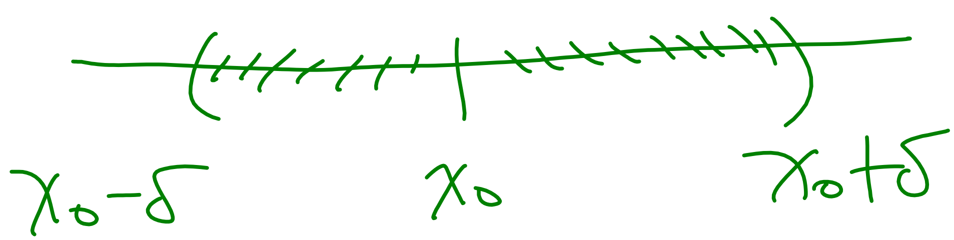
$f(x) < 0$ en $(x_0-\delta, x_0+\delta) - \{x_0\}$.

Como $f(x_0) = 0$, ent. x_0 es un maximizante local



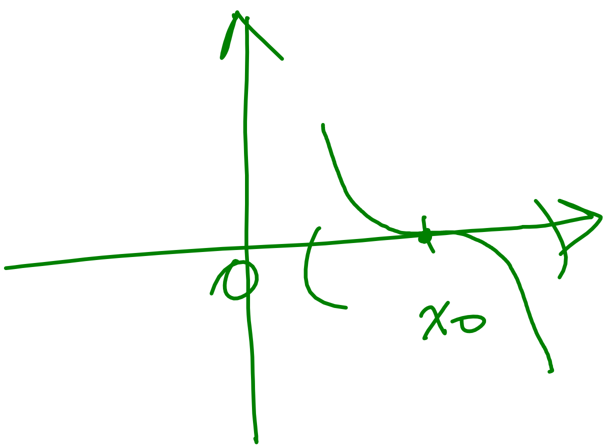
<u>Caso 3:</u> Si n es impar y $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

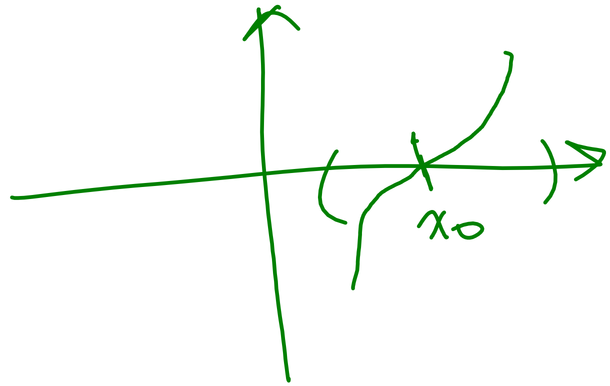
Entonces en $(x_0-\delta, x_0+\delta) - \{x_0\}$ se cumple que el signo $\dfrac{f(x)}{(x-x_0)^n}$ es igual que el signo de $f^{(n)}(x_0)$.



Como $(x-x_0)^n$ cambia de signo en $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, entonces $f(x)$ también cambia de signo en ese intervalo, pero preserva su signo en $(x_0-\delta, x_0)$ y en $(x_0, x_0+\delta)$.

Por lo tanto, como $f'(x_0)=0$, ent, f no tiene un máximo ni mínimo local en x_0.





$\blacksquare$