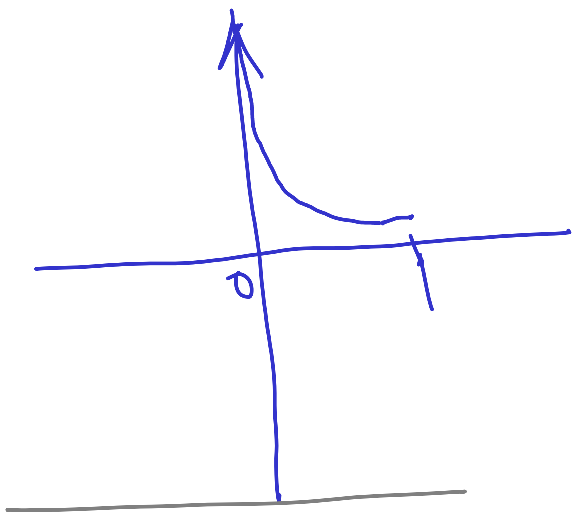
20. $\int_a^\infty f(t)\,dt$ donde f no está acotada en (a, c), con $c \in \mathbb{R}$ fijo.

Una integral $\int_a^b f(t)\,dt$ con f no acotada, es impropia si se calcula como



$$\lim_{c \to a} \underline{\int_c^b f(t)\,dt} =: \int_a^b f(t)\,dt.$$

Otra situación que puede ocurrir es que $\exists \lim_{c \to \infty} \int_a^c f(t)\,dt$ y, en ese caso, decimos que

$$\lim_{c \to \infty} \int_a^c f(t)dt = \int_a^\infty f(t)dt$$ y a esto

le llamamos integral impropia.

Puede ocurrir que tengamos una función no acotada en un intervalo de la forma (a,b) y acotada en (b,∞) de modo que tiene sentido preguntarnos si

$$\exists \int_a^\infty f(t)dt.$$ y esto equivale a

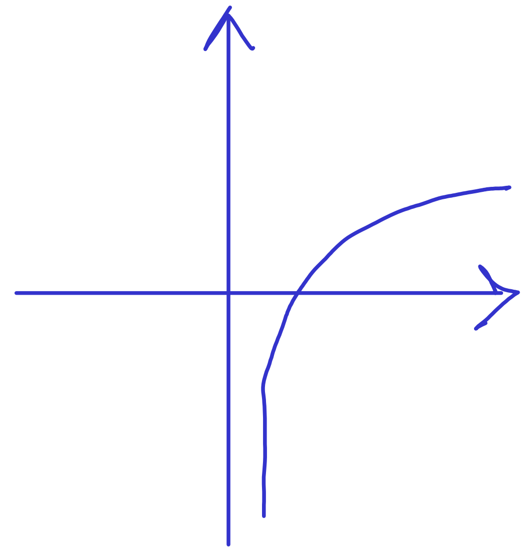
preguntarnos si $\exists \int_a^b f(t)dt$ y $\exists \int_b^\infty f(t)dt$.

En ese caso, $\int_a^\infty f := \int_a^b f + \int_b^\infty f$.

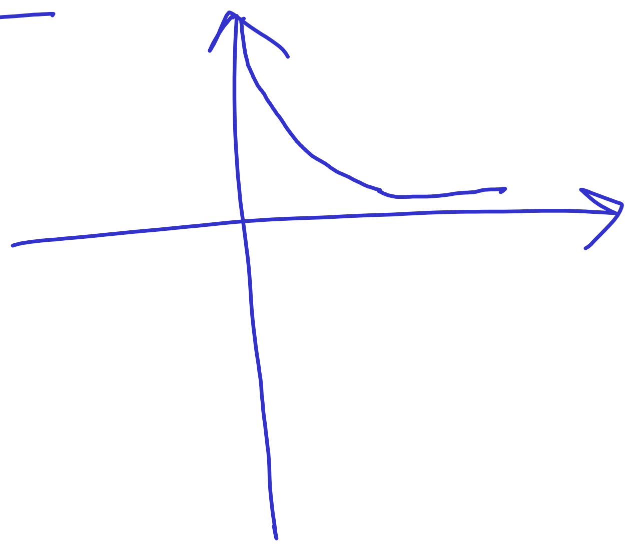
En 20 (x): $\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\, dx$

Pueden dar por hecho que

$$\underset{x \to 0}{\log(x)} \longrightarrow -\infty$$

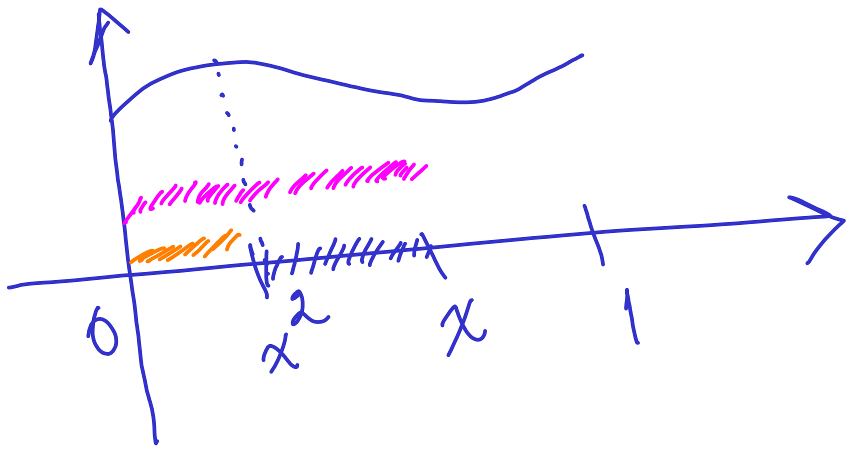


$$\frac{1}{\sqrt{x}}$$



6.

$$\int_{x^2}^{x} f(t)\,dt = \int_{x^2}^{\frac{1}{2}} f + \int_{\frac{1}{2}}^{x} f$$



$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^{x} f(t)\,dt.$$

$F'(x)$

8 (a) Si f es par, ent

$$\int_{-a}^{a} f = 2\int_0^a f.$$

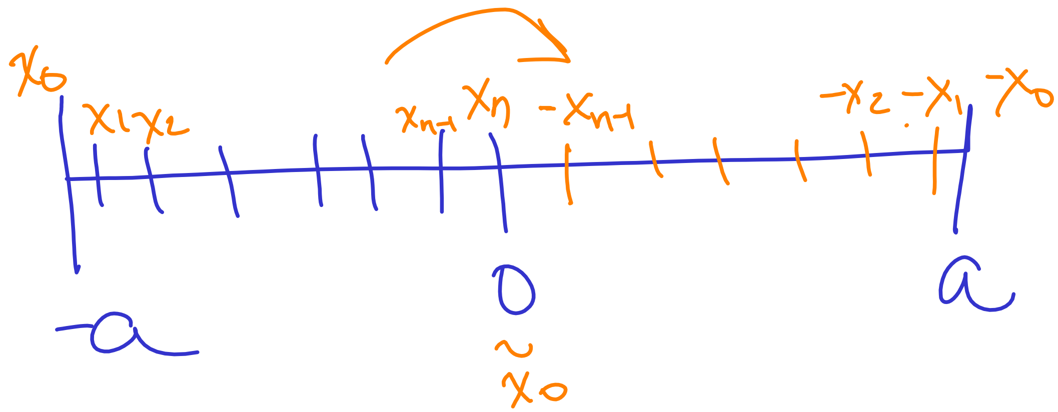
$$\int_{-a}^{a} f = \int_{-a}^{0} f + \int_0^a f.$$

$$\boxed{\int_{-a}^{0} f =: -\int_0^{-a} f.}$$

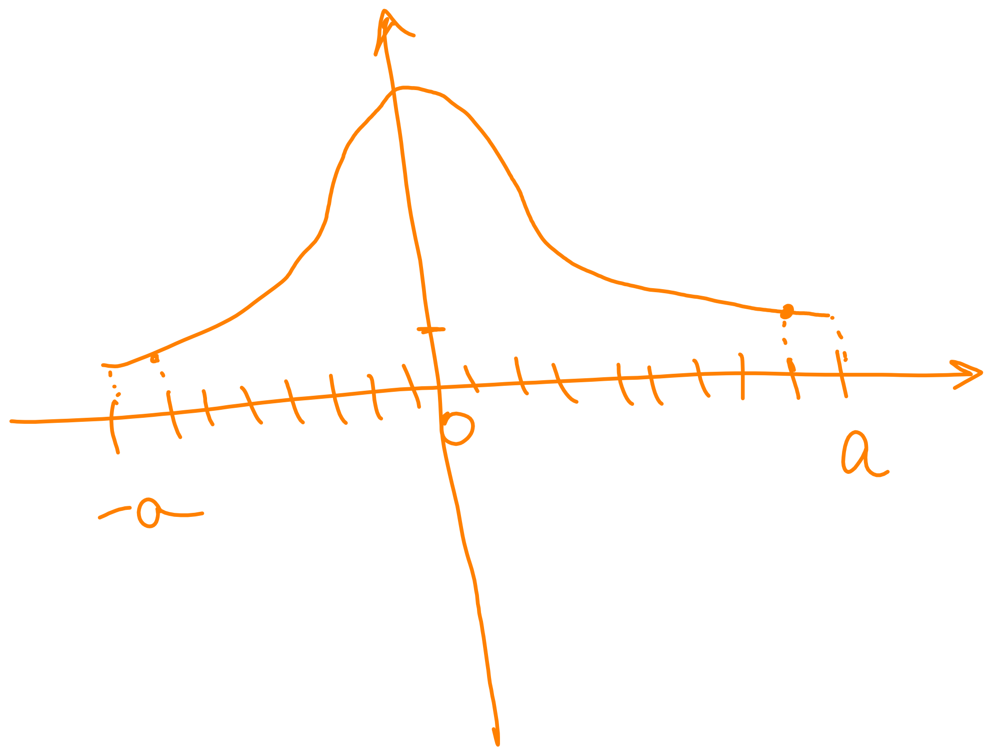
$$\int_{-a}^{0} f = \sup\{I(f|_{[-a,0]}, P) : P \in \mathcal{P}[-a,0]\}$$

usar que f es par →

$$\overset{?}{=} \int_0^a f = \sup\{I(f|_{[0,a]}, P) : P \in \mathcal{P}[0,a]\}.$$



x_0
x_1 x_2
x_{n-1} x_n $-x_{n-1}$
$-x_2$ $-x_1$ $-x_0$
$-a$
0
$\tilde{x}_0$
a



0
$-a$
a

10 (iii)

$$\int_1^3 \frac{dt}{t\sqrt{t+1}}$$

$$u(t) = \sqrt{t+1} \iff u^2(t) = t+1$$

$$u'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t+1}} . \qquad u^2(t) - 1 = t.$$

$$2u'(t) = \frac{1}{\sqrt{t+1}} .$$

$$g(x) = x^2 - 1 .$$

$$g(u(t)) = u^2(t) - 1 .$$

$$= t$$

$$\frac{1}{t\sqrt{t+1}} = \frac{2u'(t)}{g(u(t))}$$

$$\int_1^3 \frac{dt}{t\sqrt{t+1}} \underset{\text{T.C.V.}}{=} \int_{u(1)}^{u(3)} \frac{2}{g(x)}\,dx = \int_{u(1)}^{u(3)} \frac{2}{x^2-1}\,dx .$$

$$\int_1^3 \frac{1}{t\sqrt{t+1}}\,dt$$

$$u = \sqrt{t+1}$$

$$du = \frac{1}{2\sqrt{t+1}}\,dt$$

$$u^2 = t+1$$

$$2u\,du = dt$$

$$u(t) = \sqrt{t+1}$$

$$\frac{du}{dt}(t) = \frac{1}{2\sqrt{t+1}}.$$

$$du = \frac{dt}{2\sqrt{t+1}}.$$

---

16. (i)

$$\int_0^{x} \frac{1}{1+t^2}\,dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}\,dt. = F(x).$$

$$= \text{constante.}$$

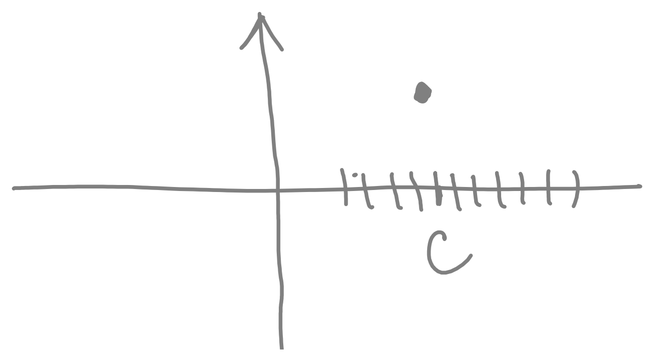
15. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

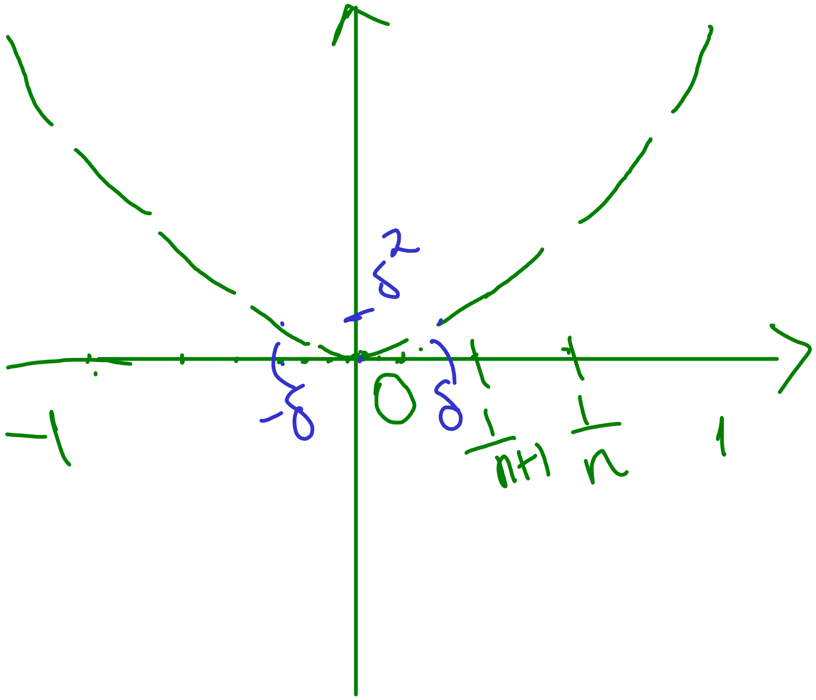
Definimos $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$. con $x \in [a,b]$

(a) Si f es derivable en $c \in (a,b)$, ent F es derivable.

(b) Si f es derivable en $c \in (a,b)$, entonces F' es continua en c y F' está definida en algún intervalo que tiene a c.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right).$$





$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\in\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right) \\ & \text{ó si } x\in\left(-\frac{1}{n},-\frac{1}{n+1}\right) \\ 0 & \text{si } x=\frac{1}{n} \text{ ó} \\ & x=-\frac{1}{n} \end{cases}$$

$\downarrow$

p.a. $n\in\mathbb{N}^+$

- f es derivable en 0 pero f no es continua en $\frac{1}{n}$ $\forall n\in\mathbb{N}^+$
- f es integrable en $[-1,1]$.
- F no es derivable en $\frac{1}{n}$ ni en $-\frac{1}{n}$

$\forall n\in\mathbb{N}^+$

F) no está definida en ningún intervalo que contenga al 0.

Para ver la integrabilidad de f hay que tomar δ t.q. $\delta^2 < \frac{\varepsilon}{2}$, dada $\varepsilon > 0$ arbitraria.

Construir una partición de $[-1, 1]$ que tenga a $-\delta$ y a δ, de modo que en $[-1, -\delta]$ quede una función continua salvo por una cant. finita de puntos y en $[\delta, 1]$ también, de modo que ahí f es integrable y por tanto hay alguna partición útil para el criterio de Riemann.

(c) Si f' es continua en c y f' existe en algún intervalo que contiene a c, entonces F' es continua en c (y F' existe en algún intervalo que tiene a

Para el 15 (b): El siguiente argumento NO se vale:

Decir que como f es derivable en c, ent. f es cont. en c y luego que $\boxed{F'(c)} = \boxed{f(c)}$ y por tanto F' es continua en c.

Puede que F' y f sólo coincidan en el punto c, y por tanto, la continuidad de f no implica la de F'.