Polinomios de Taylor.

Si P_{n,x_0} es pol. de Taylor de f alrededor de x_0,

entonces:

$$f(x) = P_{n,x_0}(x) + R_{n,x_0}(x)$$

Ya demostramos que

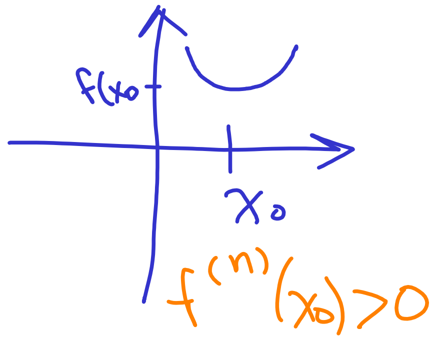
$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = 0.}$$

También probamos que si $\exists\, f'(x_0), f''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$,

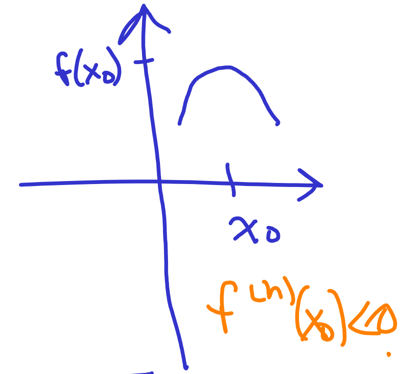
y $f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ pero

$f^{(n)}(x_0) \neq 0$, entonces:

(1) si n es par, "f se ve cerca de x_0 como el polin. $P_{n,x_0}(x) = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$", que "tiene esta forma":



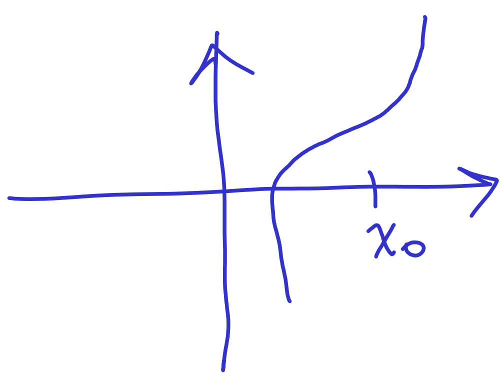
o:



y, ent. x_0 es mín. local siempre que $f^{(n)}(x_0) > 0$.

y x_0 es máx. local siempre que $f^{(n)}(x_0) < 0$.

(2) Si n es impar tenemos la siguiente ilustración para el comportamiento de f cerca de x_0 y x_0 no es minimiz. local ni maximiz. local.

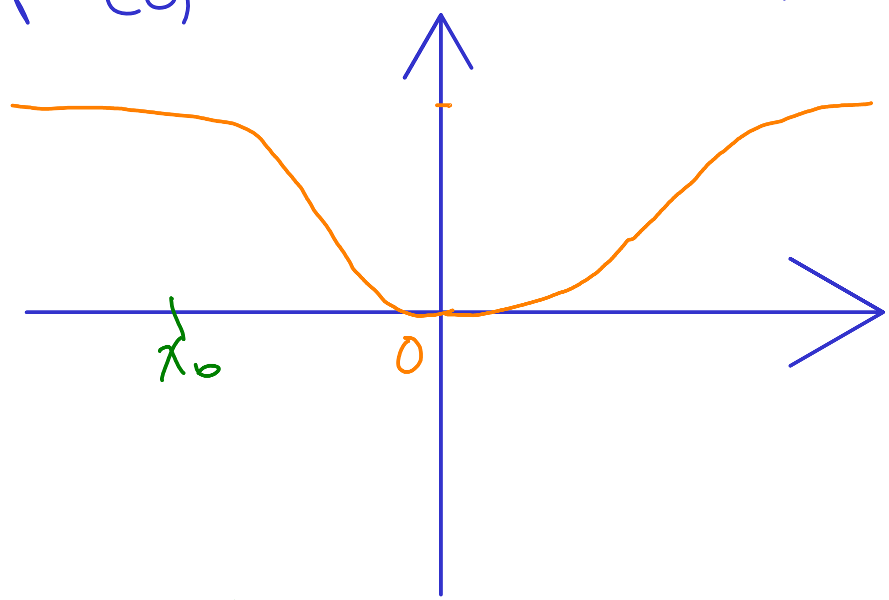


Ejemplo: La función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

es infinitamente derivable en $\mathbb{R}$.

$$f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$



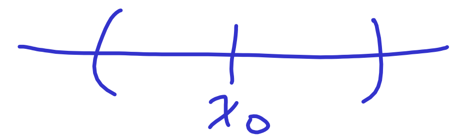
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n,0}(x) \equiv 0.$$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}$$

$$\underset{\text{L'Hôpital}}{=} 0$$

Nótese que f tiene un mín. local en 0 y sin embargo, no podemos aplicar el criterio del resultado anterior para encontrar este mínimo local.

Definición: Si f y g son funciones definidas en algún intervalo $(x_0-\delta, x_0+\delta)$



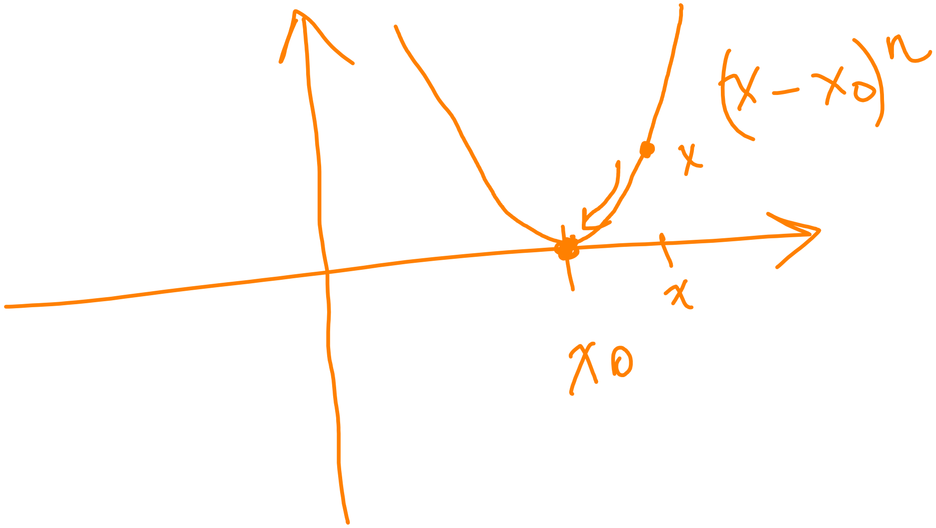
Decimos que f y g son **iguales hasta el orden n en x_0** sii

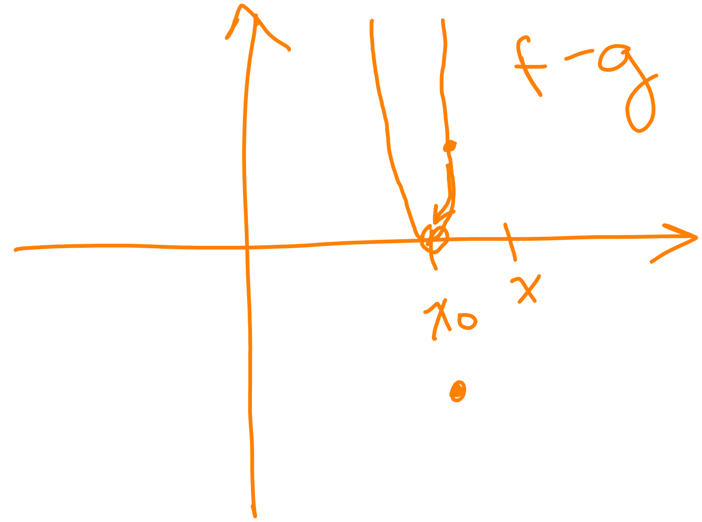
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-g(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Ejemplo $f(x) = (x-x_0)^{n+1}$ y $g(x) = 0$.

$$\frac{f(x)-g(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{(x-x_0)^{n+1}-0}{(x-x_0)^n} = (x-x_0)$$

$$\xrightarrow[x \to x_0]{} 0.$$





Teorema Si P y Q son dos polinomios de grado $\leq n$ y son iguales hasta el orden n en algún punto x_0. Entonces $P(x) = Q(x)$.

Dem: Si P y Q son de grado $\leq n$ e iguales hasta el orden n, entonces, si llamamos $R(x) := P(x) - Q(x)$, se tiene que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

P.D $R(x) \equiv 0$.

Escribimos $R(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)^2 + \dots +$

$b_{n-1}(x-x_0)^{n-1} + b_n(x-x_0)^n$.

Notemos que, como $\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{(x-x_0)^n} = 0$, entonces,

si $0 \leq i \leq n$

$$\frac{R(x)}{(x-x_0)^i} = \frac{R(x)(x-x_0)^{n-i}}{(x-x_0)^n} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

$\frac{R(x)}{(x-x_0)^n} \to 0$

$(x-x_0)^{n-i} \to 0$ si $n > i$

$(x-x_0)^{n-i} \to 1$ si $n = i$.

Esto significa que $R(x)$ es igual a la función 0 hasta el orden i en x_0 $\forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Como $0 = \lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{(x-x_0)^0} = \lim_{x \to x_0} R(x) = b_0.$

$\therefore R(x) = b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)^2 + \dots + b_n(x-x_0)^n.$

$$0 = \lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} b_1 + b_2(x-x_0) + \dots + b_n(x-x_0)^{n-1}$$

$$= b_1.$$

Proseguimos así inductivamente y encontramos que $0 = b_0 = b_1 = \dots = b_n.$

$\therefore R(x) \equiv 0.$

Esto significa que $P(x) = Q(x).$ $\blacksquare$

f y g son iguales hasta el orden n en x_0 si $f-g$ comparada con el pol. de grado n $(x-x_0)^n$, se va a cero más rápido.

Obs: Si f es t.q. $\exists\, f'(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$, ent. f es igual a su polinomio de Taylor de grado n en torno a x_0, hasta el orden n en x_0.

Corolario: Si f es n veces derivable en x_0 y si $P(x) = b_0 + b_1 (x-x_0) + \dots + b_n (x-x_0)^n$ es tal que $P(x)$ es igual a f hasta el orden n en x_0, entonces $P(x) = P_{n,x_0}(x)$.

<u>Dem:</u> Sup. que $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-P(x)}{(x-x_0)^n} = 0$

Como f es n veces derivable en x_0, ent. $\exists\, P_{n,x_0}(x)$ el pol. de Taylor de grado n de f en torno a x_0.

Notemos que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)-P_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{P(x)-f(x)}{(x-x_0)^n} + \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-P_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n}.$$

$= 0 + 0$ (por hip y por resultado previo)

$\therefore$ Por el Teo. anterior, $P(x) = P_{n,x_0}(x)$.

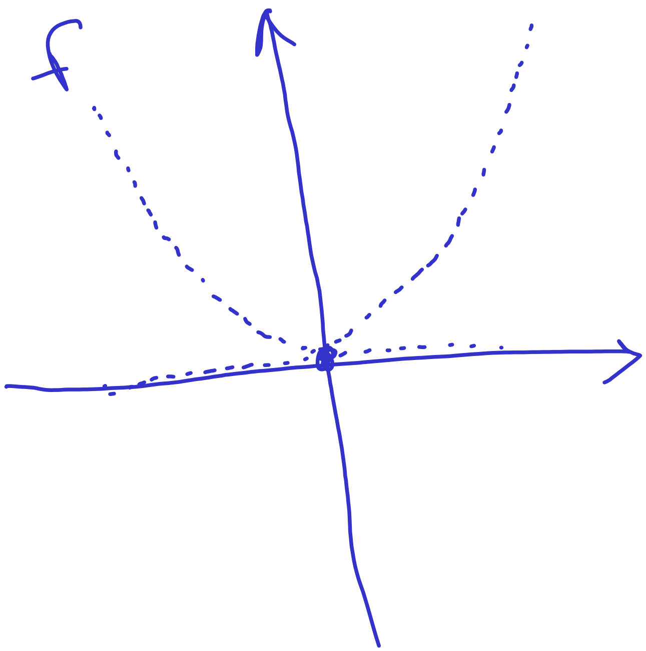
$\blacksquare$

$\therefore$ Es equivalente que un pol. sea el pol. de Taylor de f a que éste sea igual a f hasta el orden n en x_0, siempre y cuando f sea n veces derivable en x_0.

Nota: Si f no es n veces derivable en x_0, el hecho de que f sea igual a un pol. $P(x)$ hasta el orden n en x_0 $\boxed{\text{no}}$ implica que $P(x)$ sea el pol. de Taylor de f de grado n en torno a x_0.

Sea $n \in \mathbb{N}^+$ fijo.

Sea $f(x) = \begin{cases} x^{n+1} & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$



$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 0}{(x-0)^n} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0$$

pues $\left| \frac{f(x)}{x^n} \right| \leq \frac{|x^{n+1}|}{|x^n|} = |x| \xrightarrow{x \to 0} 0$

$\therefore$ f es igual al polinomio de $P \equiv 0$ hasta el orden n en $x_0 = 0$

Sin embargo, f no es dos veces derivable en 0.

pues si $\exists\ f''(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0}$,

y f' tendría que existir para $x \neq 0$ cercano a 0. Sin embargo f' no existe para $x \neq 0$.

$\therefore$ f no tiene pol. de Taylor de grado 2 pero sí es igual a $P \equiv 0$ hasta el orden 2 en $x_0 = 0$.

Polinomios de Taylor

Para $sen(x)$

$$P_{2n+1,0}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

$\cos(x)$:

$$P_{2n,0}(x) = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

e^x:

$$P_{n,0}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

Para $\log(x)$: $(x>0)$

Evaluando en $x_0 = 1$.

$$\log'(x) = \frac{1}{x} \qquad \log'(1) = 1$$

$$\log''(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad \log''(1) = -1$$

$$\log'''(x) = \frac{2}{x^3} \qquad \log'''(1) = 2$$

$$\log^{(iv)}(x) = -2\cdot 3\cdot \frac{1}{x^4} \qquad \log^{(iv)}(1) = -2\cdot 3$$

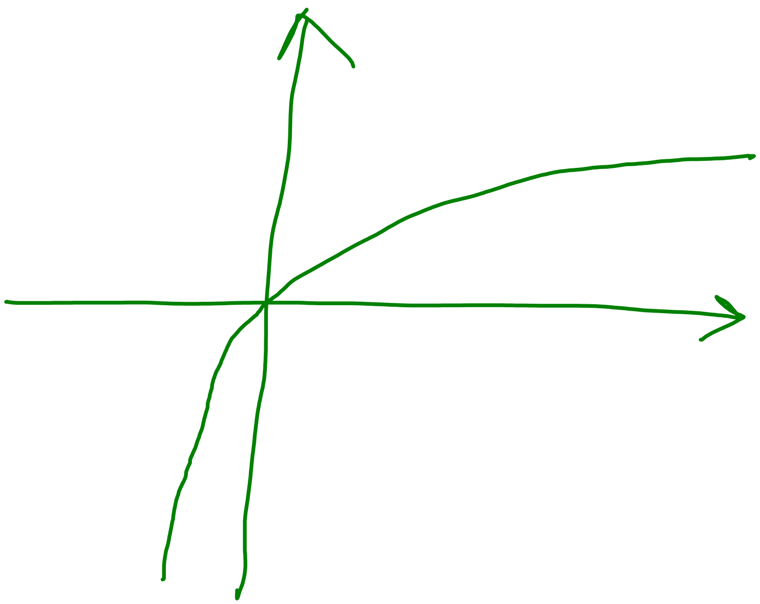
$$\log^{(k)}(1) = (-1)^{k-1}(k-1)!$$

$$P_{n,1}(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \dots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n$$

$$= 0 + (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n.$$

Muchas veces se considera a la función

$\log(1+x)$



Ejercicio:

$$\boxed{P_{n,0}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.}$$