Para $f(x) = e^x$,

$$e^x = \underbrace{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}}_{P_{n,0}(x)} + \underbrace{\int_0^x \frac{e^t}{n!}(x-t)^n\,dt}_{R_{n,0}(x)}.$$

Para $x > 0$:

$0 < t < x \Rightarrow e^t < e^x$

$$0 \leq |R_{n,0}(x)| = R_{n,0}(x) = \int_0^x \frac{e^t}{n!}(x-t)^n\,dt$$

$$\underset{\substack{\text{exp. es crec.} \\ \text{y } (x-t)^n > 0}}{\leq} \frac{e^x}{n!}\int_0^x (x-t)^n\,dt \underset{\text{T.F.C.}}{=} \frac{e^x}{n!}\left(-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right)\Bigg|_0^x$$

$$= \frac{e^x}{n!}\cdot\frac{x^{n+1}}{(n+1)} = \frac{e^x \cdot x^{n+1}}{(n+1)!} \underset{e<3}{<} \boxed{\frac{3^x \cdot x^{n+1}}{(n+1)!}} \quad \forall x > 0.$$

Ejemplo

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt.$$

$$\frac{1}{1+t} = \left(1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^n t^n\right) + \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1}}{1+t}.$$

Ent:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$$

$$+ \underbrace{\int_0^x \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1}}{1+t}\,dt}_{R_{n+1}(x)}.$$

Para $x > 0$:

$$|R_{n+1}(x)| = \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\,dt < \int_0^x t^{n+1}\,dt = \frac{x^{n+2}}{n+2}.$$

Si $x \in (0,1)$, ent. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^{n+2}}{n+2} = 0$.

¿Qué pasa si $x \geq 1$.

Si $x > 1$: $\dfrac{x^{n+2}}{n+2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. (¿¿¿)

Si $x = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^{n+2}}{n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+2} = 0$.

Para $\underline{\underline{x > 1}}$, ¿cómo sabemos si $|R_{n+1,0}(x)| \longrightarrow \infty$?

$$|R_{n+1,0}(x)| = \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\, dt$$

Como $x > 1$, ent $0 < 1+t \leq 1+x < 2x \Rightarrow \dfrac{1}{2x} < \dfrac{1}{1+t}$.

Entonces. $\displaystyle\int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\, dt \geq \frac{1}{2x}\int_0^x t^{n+1}\, dt = \frac{x^{n+2}}{(n+2)\,2x}$

$$= \frac{x^{n+1}}{2(n+2)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \quad \text{pues } x > 1.$$

Si $x > 1$, $\left|R_{n+1,0}(x)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

$\therefore$ Para $x>1$, $P_{n+1,0}(x)$ no resulta una buena aproximación $\log(1+x)$, pero sí lo es para $x \in (0,1]$

Para $x \in (-1, 0]$ también resulta que

$\left|R_{n+1,0}(x)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (lo veremos como ejercicio).

Recordemos que:

$$\boxed{\log(a\cdot b) = \log(a) + \log(b) \qquad \forall a, b > 0.} \quad \circledast$$

Como nosotros podemos estimar con "buena precisión" logaritmos de números $1+x$ con $x \in (-1, 1)$, entonces, usando la prop. $\circledast$ podríamos estimar también $\log(y)$ $\forall y > 0$.

$$\log(20) = \log(2\cdot 10) = \log(2) + \log(10)$$

$$= \log(2) + \log(2\cdot 5)$$

$$= \log(2) + \log(2) + \log(5)$$

$$\vdots$$

Teorema: e es irracional.

Dems: Por reducción al absurdo:

Sup que $e = \frac{a}{b}$ con $a, b \in \mathbb{N}^+$ (sabemos que $e > 0$).

Sabemos que $\forall n \in \mathbb{N}^+$

$$e = e^1 = \underbrace{1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}}_{P_{n,0}(1)} + \underbrace{\int_0^1 \frac{e^t}{n!}(1-t)^n \, dt}_{R_{n,0}(1)}.$$

Recordemos que $R_{n,0}(x) \leq \frac{3^x \, x^{n+1}}{(n+1)!}$. Ent. $R_{n,0}(1) \leq \frac{3}{(n+1)!}$

Ent:

$$e = \frac{a}{b} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + R_{n,0}(1)$$

$$\Rightarrow \frac{a \cdot n!}{b} = \underbrace{2 \cdot n! + \frac{n!}{2} + \frac{n!}{3!} + \cdots + \frac{n!}{n!}}_{\in \mathbb{N}^+.} + n!\, R_{n,0}(1).$$

Si tomamos $n > b$, ent $\frac{a \cdot n!}{b} \in \mathbb{N}^+$.

$$\Rightarrow n!\, R_{n,0}(1) = \frac{a \cdot n!}{b} - \left(2n! + \frac{n!}{2} + \cdots + \frac{n!}{n!}\right) \in \mathbb{Z}.$$

Sabemos además que:

$$0 < n!\, R_{n,0}(1) < \frac{n!\, 3}{(n+1)!} = \frac{3}{n+1}.$$

Si $n > 3$, ent $n+1 > 4$, ent. $0 < n!\, R_{n,0}(1) < \frac{3}{4}$

$< 1.$

¡Esto contradice al hecho de que $n!\, R_{n,0}(1) \in \mathbb{Z}$. !

$\therefore$ e es irracional.

$\blacksquare$