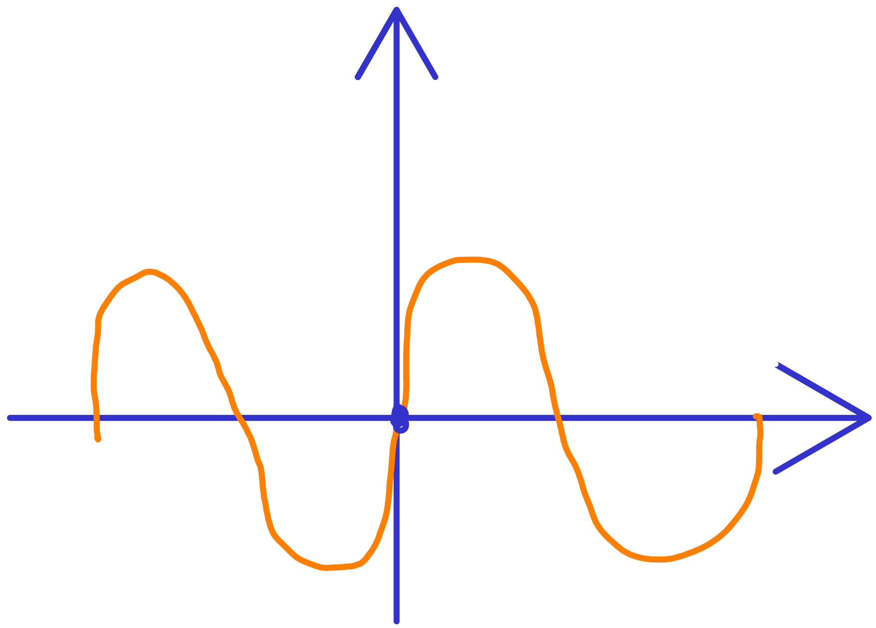
Pensando en el ej. 8:

Si $f(x) = \mathrm{sen}(x)$, su pol. de Taylor de grado m en torno a $x_0 = 0$.

es: $P_m(x) = \underline{f(0)} + \underline{f'(0)}(x) + \dfrac{f''(0)}{\underline{2!}} x^2 + \dots + \dfrac{f^{(m)}(0)}{m!} x^m$.



$$\begin{cases} f(x) = \mathrm{sen}(x) \\ f'(x) = \cos(x) \\ f''(x) = -\mathrm{sen}(x) \\ f'''(x) = -\cos(x) \end{cases}$$

$f^{(iv)}(x) = \mathrm{sen}(x) = f(x)$

$f(0) = 0$ ✓

$f'(0) = 1$

$f''(0) = 0$ ✓

$f'''(0) = -1$

$f^{(iv)}(0) = 0$

Todas las derivadas pares de f, al evaluarlas en 0, dan 0 y, por tanto, los términos de la forma x^{2k} con $k \in \mathbb{N}$ no aparecen en el pol. de Taylor pues su coeficiente es 0.

$\therefore$ Si $m = 2n+1$, con $n \in \mathbb{N}$, ent.

$$P_{2n+1,0}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \underbrace{(-1)^n}_{= f^{(2n+1)}(0)} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Sabemos que $\operatorname{sen}(x) = P_{2n+1,0}(x) + R_{2n+1,0}(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}$

8(i) Si $f(x) := \operatorname{sen}(x^2)$, entonces

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}: \quad \operatorname{sen}(x^2) = P_{2n+1,0}(x^2) + R_{2n+1,0}(x^2).}$$

Sabemos que:

$$P_{2n+1,0}(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!}.$$

es un polinomio de grado $4n+2$.

Queremos ver que éste es el pol. de Taylor de grado $4n+2$ en torno a $x_0 = 0$.

Mostraremos esto viendo que $P_{2n+1,0}(x^2)$ es igual a $\operatorname{sen}(x^2)$ hasta el orden $4n+2$ en 0, es decir:

Veremos que $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2) - P_{2n+1,0}(x^2)}{x^{4n+2}} = 0.$

Sabemos que:

$$\frac{\operatorname{sen}(x^2) - P_{2n+1,0}(x^2)}{x^{4n+2}} = \frac{R_{2n+1,0}(x^2)}{x^{4n+2}}.$$

Af. que $\lim_{x \to 0} \frac{R_{2n+1,0}(x^2)}{x^{4n+2}} = 0.$

$$\left(R_{2n+1,0}(x) = \frac{f^{(2n+2)}}{(2n+2)!}(\xi_x)\, x^{2n+2}. \right)$$

Sabemos también que:

$$\boxed{\lim_{y \to 0} \frac{\operatorname{sen}(y) - P_{2n+1,0}(y)}{y^{2n+1}} = \lim_{y \to 0} \frac{R_{2n+1,0}(y)}{y^{2n+1}} = 0.} \quad (*)$$

Si $y = x^2$, cuando $x \to 0$ se tiene que

$$y = x^2 \longrightarrow 0.$$

Ent, por $(*)$

$$0 = \lim_{x \to 0} \frac{R_{2n+1,0}(x^2)}{(x^2)^{2n+1}} = \lim_{x \to 0} \frac{R_{2n+1}(x^2)}{x^{4n+2}}.$$

P.D: $\lim_{x \to 0} \dfrac{R_{2n+1}(x^2)}{x^{4n+2}} = 0$.

P.D $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \left(0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow \left| \dfrac{R_{2n+1}(x^2)}{x^{4n+2}} \right| < \varepsilon \right)$.

Sea $\varepsilon > 0$ (buscamos $\delta > 0$).

Sabemos que:

$$\lim_{y \to 0} \frac{R_{2n+1}(y)}{y^{2n+1}} = 0.$$

Esto significa que para nuestra $\varepsilon > 0$,

$$\exists \tilde{\delta} > 0 \text{ t.q } \forall y \left(0 < |y| < \tilde{\delta} \Rightarrow \left| \frac{R_{2n+1,0}(y)}{y^{2n+1}} \right| < \varepsilon \right).$$

(Si $y = x^2$, con $x \in \mathbb{R}$, $0 < |x^2| < \tilde{\delta}$ garantiza

que $\left| \dfrac{R_{2n+1,0}(x^2)}{(x^2)^{2n+1}} \right| < \varepsilon$)

Definimos $\delta := \sqrt{\tilde{\delta}} > 0$.

Entonces, $\forall x \ (0 < |x| < \delta \Rightarrow 0 < |x^2| < \delta^2 = \tilde{\delta}$

$$\Rightarrow \left| \frac{R_{2n+1}(x^2)}{(x^2)^{2n+1}} \right| < \varepsilon.$$

$$\therefore \forall x \left(0<|x|<\delta \Rightarrow \left| \frac{R_{2n+1}(x^2)}{x^{4n+2}} \right| < \varepsilon \right).$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{R_{2n+1}(x^2)}{x^{4n+2}} = 0.$$

Por tanto, por Teo. de clase (? marzo),

se sigue que $P_{2n+1,0}(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!}$.

es el Pol. de Taylor de $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$

en torno al 0 y de grado $4n+2$.

(iii) Sup que g es m veces derivable en 0 y su pol. de Taylor de grado m en torno al 0:

$$P_{m,0}(x) = g(0) + g'(0)\cdot x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{g^{(m)}(0)}{m!}\cdot x^m.$$

Buscamos el pol. de Taylor de $g(x^n)$, en $x_0 = 0$, para algún $n \in \mathbb{N}^+$.

Si $f(x) = g(x^n)$, ent.

$$f(x) = g(x^n) = P_{m,0}(x^n) + R_{m,0}(x^n).$$

12(i) Si existe $f''(x_0)$, ent.

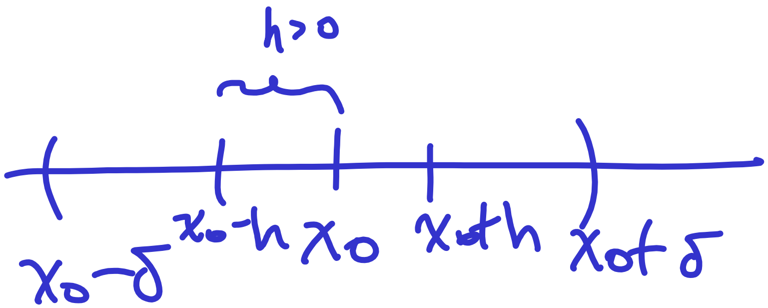
$$f''(x_0) = \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0)}{h^2}}_{\text{segunda derivada de Schwarz de } f \text{ en } x_0}.$$

(ii) $\exists$ seg. der. de Schwarz en $x_0 \not\Rightarrow \exists f''(x_0)$.

(iii) Demostrar que si f tiene un máx. local en x_0, ent. la segunda der. de Schwarz es ≤ 0.

Si x_0 es maximiz. local, ent $\exists \delta > 0$ $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $f(x_0) \geq f(x)$.

Ent, si $0<|h|<\delta$, se sigue que $x_0+h, x_0-h \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$



$$f(x_0+h)+f(x_0-h) \le f(x_0)+f(x_0) = 2f(x_0)$$

$$\therefore \quad f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0) \le 0.$$

$$\therefore \quad \frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2} \le 0.$$

Si existe la segunda derivada de Schwarz, ent.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0)}{h^2} \leq 0.$$