Repaso de sucesiones.

Una sucesión de números reales es, informalmente una enumeración de números reales.

Ej:

$(0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots)$

Definición: Una sucesión es una función $\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

Con la interpretación anterior, la suc. se ve como:

$(\alpha(0), \alpha(1), \alpha(2), \ldots)$.

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ es un ordenamiento de dos números reales: x y y

$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ordena a los números reales x, y y z.

Ejemplo: $\alpha : \mathbb{N}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$\alpha(n) = \frac{1}{n}.$$

Esta sucesión se ve como:

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right).$$

Notación: Si $\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, denotamos a esta sucesión como $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$

$\hookrightarrow (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots)$

Aquí, $\alpha_n = \alpha(n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$

Igualmente, si $\alpha: \mathbb{N}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ es una suc. con dominio $\mathbb{N}^+$, escribimos $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ para denotar a la sucesión.

<u>Ej:</u> $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ representa a la sucesión de arriba: $\boxed{\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)}$.

<u>Af. informal:</u> Conforme $n \in \mathbb{N}^+$ crece, las imágenes de la sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ se van acercando al 0 "tanto como queramos".

En lenguaje matemático decimos que

$\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ converge a 0.

Definición: Sea $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de números reales y sea $L \in \mathbb{R}$. Decimos que a_n converge a L si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ |a_n - L| < \varepsilon.$$

Ejemplo: $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ converge a 0.

P.D. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$

Como $\forall n \in \mathbb{N}^+$ se cumple que $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n}$, lo que queremos probar es: .

P.D. $\forall \varepsilon > 0 \ \underline{\exists N \in \mathbb{N}} \ \forall n \geq N \ \frac{1}{n} < \varepsilon$.

$\frac{1}{n} < \varepsilon \iff$

$\frac{1}{\varepsilon} < n$

<u>Dems</u>: Sea $\varepsilon > 0$ arbitraria.

Tomemos $N \in \mathbb{N}$ t.q. $\frac{1}{\varepsilon} < N$.

Dicho N existe por la Prop. Arquimediana

Sea $n \geq N$. Entonces $\frac{1}{\varepsilon} < N \leq n$.

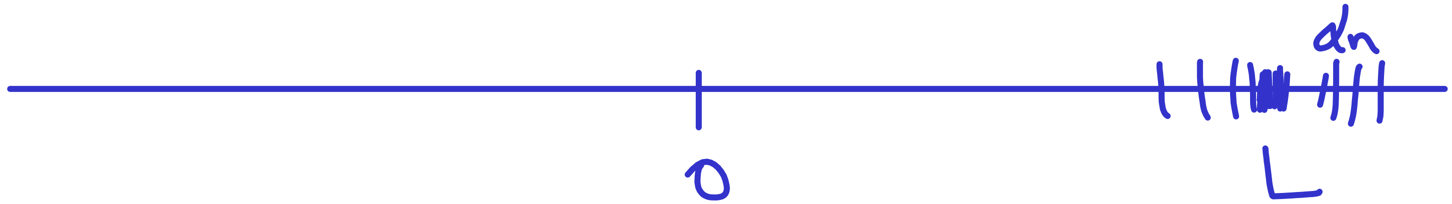
Por tanto, $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

$\therefore \forall n \geq N \ \frac{1}{n} < \varepsilon$.

$\therefore$ $\boxed{\frac{1}{n} \text{ converge a } 0.}$

Notación: Si $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión que converge al número real L, escribimos

$$\boxed{\alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L}$$



Teorema del sándwich.

Si $(x_n)_{n=0}^{\infty}$, $(y_n)_{n=0}^{\infty}$, $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$ son sucesiones tales que:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \le \alpha_n \le y_n.$$

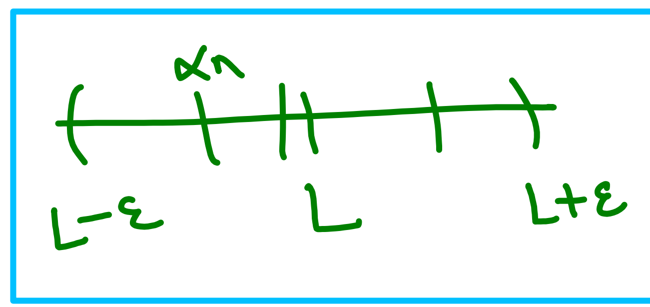
Si $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$ y $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$ para algún $L \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$.

<u>Dem:</u> Sup. $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$ y $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$.

Sup. además que $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \leq \alpha_n \leq y_n$.

P.D. $\alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$.

P.D. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq N$ $|\alpha_n - L| < \varepsilon$.



Sea $\varepsilon > 0$.

Como $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$,

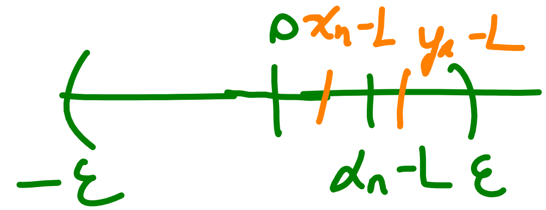
para dicha $\varepsilon > 0$ $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq N_1$ $|x_n - L| < \varepsilon$:

Como $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$, para nuestra $\varepsilon>0$,

$\exists N_2\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N_2 \quad |y_n - L|<\varepsilon$.

Además, $\forall n\in\mathbb{N}$:

$$x_n - L \leq \alpha_n - L \leq y_n - L$$



Sea $N=\max\{N_1,N_2\}$. Ent $\forall n\geq N$ se cumple que

$$-\varepsilon < x_n - L \leq \alpha_n - L \leq y_n - L < \varepsilon$$

$n\geq N\geq N_1$

pues $n\geq N\geq N_2$

Por tanto $\forall n\geq N \quad |\alpha_n - L|<\varepsilon$.

$\therefore \alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$.

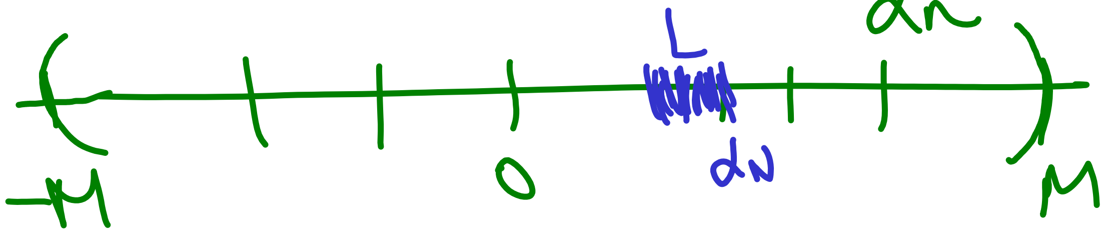
$\blacksquare$

Corolario: Si $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$ y $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ son t.q. $0 \leq \alpha_n \leq x_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces, si $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, se sigue que $\alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Proposición: Si $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión que converge a algún $L \in \mathbb{R}$, se tiene entonces que

$$\exists M > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (|\alpha_n| \leq M) \quad \ldots\ldots \quad (*)$$

Una sucesión que satisface $(*)$ es llamada **sucesión acotada**.



Ejemplos: ① Si $\alpha < 0$, ent. $(n^\alpha)_{n=1}^\infty$ es t. q.

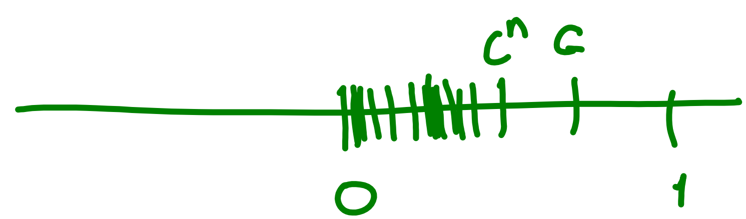
$$n^\alpha \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Obs:

$$n^\alpha = \frac{1}{n^{-\alpha}} \quad \text{con } -\alpha > 0.$$

$$= \left(\frac{1}{n}\right)^{-\alpha}.$$

② Si $0 < c < 1$. Entonces $c^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.



<u>Dem.</u> Si $0 < c < 1$, ent. $1 < \frac{1}{c}$.

Por tanto $\frac{1}{c} = 1 + y$ para algún $y > 0$.

Ent $c = \frac{1}{1+y}$ con $y > 0$ fijo.

$\therefore$ $c^n = \frac{1}{(1+y)^n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

PD. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ \left| \frac{1}{(1+y)^n} - 0 \right| < \varepsilon$.

PD $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ \frac{1}{(1+y)^n} < \varepsilon$.

Sea $\varepsilon > 0$.

Recordemos que la Desigualdad de Bernoulli dice que para $y > -1$ y $\forall n \in \mathbb{N}$

$$1 + n \cdot y \leq (1+y)^n.$$

Ent para $n \in \mathbb{N}$ se tiene que:

$$\frac{1}{(1+y)^n} \leq \frac{1}{1+ny}.$$

$$\frac{1}{1+ny} < \varepsilon \Leftarrow$$

$$\frac{1}{ny} < \varepsilon \Leftarrow$$

$$\frac{1}{\varepsilon \cdot y} < n$$

Sea $N \in \mathbb{N}$ t.q. $\frac{1}{\varepsilon \cdot y} < N$.

Ent, $\forall n \geq N$ se tiene que:

$$0 \leq \frac{1}{(1+y)^n} \leq \frac{1}{1+ny} < \frac{1}{ny} < \frac{1}{Ny} < \varepsilon.$$

$\therefore \quad e^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$ //

Teorema: Criterio de Cauchy para convergencia de sucesiones:

Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales, entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:

I $\exists L \in \mathbb{R}$ t.q. $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$.

II $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > m \geq N \ |a_n - a_m| < \varepsilon.$