4. Encontrar e con siete decimales

$$e = \underline{e^1} = \underline{P_{n,0}(1)} + R_{n,0}(1)$$

Queremos $R_{n,0}(1) = 0.\underbrace{0000000}_{7 \text{ ceros}}a_8 a_9 \ldots$

Obs: $10^{-7} = \dfrac{1}{10000000} = 0.\underbrace{000000}_{6 \text{ ceros}}1 \ldots$

Necesitamos $R_{n,0}(1) < 0.\underbrace{0000000}_{7 \text{ ceros}}9 \ldots$ (*)

<u>Si</u> logramos $R_{n,0}(1) < 10^{-7}$, garantizamos.

1 (viii) Pol. de T. de $F(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ de grado $2n+1$.

$$\frac{1}{1+x^2} =$$

3 Necesitamos que $\exists f^{(n+1)}$ en algún intervalo de la forma $(-\delta,\delta)$, es decir en algún intervalo alrededor de $x_0 = 0$.

¿Hasta qué n puedo garantizar que existe $f^{(n+1)}$?

Af: $n = 1$ es el máximo grado posible

pues $\exists f''$ en $(-\delta,\delta)$.

pero $f'''(0)$ no existe

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4\cos\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x - 0}$$

$$= \lim_{x\to 0} x^3 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

$$f''(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0}$$

En $x \neq 0$: $$f'(x) = 4x^3 \cdot \cos\left(\tfrac{1}{x}\right) + \frac{x^4 \operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{x}\right)}{x^2}$$

$$= 4x^3 \cos\left(\tfrac{1}{x}\right) + x^2 \operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{x}\right)$$

$$\therefore f''(0) = \lim_{x \to 0} \frac{4x^3 \cos\left(\tfrac{1}{x}\right) + x^2 \operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{x}\right) - 0}{x - 0}$$

$$= 0.$$

Af: $\nexists f'''(0)$

$$\nexists \lim_{x \to 0} \frac{f''(x) - f''(0)}{x - 0}.$$

Para $x \neq 0$, $$f''(x) = 12x^2 \cos\left(\tfrac{1}{x}\right) + 6x \operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\tfrac{1}{x}\right)$$

Af: $\nexists \lim_{x \to 0} \dfrac{12x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) + 6x\,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$

Nótese que:

$$\frac{12x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) + 6x\,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = 12x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + 6\,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$$

$$= : h(x)$$

Sea $x_k = \dfrac{1}{2k\pi}$.

Ent. $x_k \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$

y $h(x_k) = \dfrac{12}{2k\pi}\cos(2k\pi) + 0 - 2k\pi \cdot \cos(2k\pi)$

$$= \frac{6}{k\pi} - 2k\pi = \frac{6 - 2k^2\pi^2}{k\pi} \xrightarrow[k \to \infty]{} -\infty$$

$\boxed{}$

(Pág. 135 de Bartle & Sherbert
Teo 4.1.8)

$\therefore$ Como $x_k \to 0$ y $\ln(x_k)$ no converge, ent.

$$\nexists \lim_{x \to 0} \ln(x).$$

Para 8(ii): El Pol. de T. de $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ es:

$$Q(x) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}.$$

Ent: $$\frac{f^{(2)}(0)}{2!} = 1 \Rightarrow f^{(2)}(0) = 2!$$

$$\frac{f^{(6)}(0)}{6!} = -\frac{1}{3!} \Rightarrow f^{(6)}(0) = -\frac{6!}{3!}$$

$$\underbrace{\frac{f^{(4k+2)}(0)}{(4k+2)!}}_{\text{coef. de } x^{4k+2}} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow f^{(4k+2)}(0) = \frac{(4k+2)!\,(-1)^k}{(2k+1)!}.$$

y para $m \neq 4k+2$, $f^{(m)}(0) = 0$.

(iii) Sea

$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$. el P. de T. de g cent en 0 y de grado m.

Ent. $P(x^n) = a_0 + a_1 x^n + a_2 x^{2n} + \cdots + a_m x^{m \cdot n}$.

Se puede probar que $P(x^n)$ es el pol. de T. de grado $m \cdot n$ de la función $f(x) = g(x^n)$.

Ent:
$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \begin{cases} a_j & \text{si } k = j \cdot n \\ 0 & \text{si } k \text{ no es múlt. de } n. \end{cases}$$

Ent.
$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} (j \cdot n)! \cdot a_j & \text{si } k = j \cdot n \\ 0 & \text{si } k \text{ no es múlt de } n. \end{cases}$$

Aquí, $a_j = \dfrac{g^{(j)}(0)}{j!}$

para todo $0 \leq j \leq m$.

6(iv) Buscamos 5 decimales de π,

Por (iii) sabemos que

$$\frac{\pi}{4} = 4 \cdot \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$

$$\Rightarrow \pi = 16 \cdot \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - 4\arctan\left(\frac{1}{239}\right).$$

Sea $P_{n,0}(x)$ el P. de T. de grado n y centrado en 0 de la función $\arctan(x) = h(x)$

Ent $h(x) = P_{n,0}(x) + R_{n,0}(x)$

$$h\left(\frac{1}{5}\right) = P_{n,0}\left(\frac{1}{5}\right) + R_{n,0}\left(\frac{1}{5}\right). \quad y$$

$$h\left(\frac{1}{239}\right) = P_{n,0}\left(\frac{1}{239}\right) + R_{n,0}\left(\frac{1}{239}\right).$$

Si $|R_{n,0}(\bar{x})| < 10^{-5}$, ent $R_{n,0}(\bar{x}) = 0.00000b_6b_7\ldots$