2. (i) Si $p(x) = x^2 - 4x - 9$,

escribir a $p(x)$ como un polinomio en

$x-3$.

Calculamos el pol. de T. de p en $x_0 = 3$

y de grado 2.

Sea $q(x)$ dicho pol. de Taylor.

$$q(x) = a_0 + a_1(x-3) + a_2(x-3)^2.$$

¿Por qué $q(x) = p(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$?

Si p y q son pols de grado n y

son iguales hasta el orden en un punto,

entonces $p = q$.

Además como q es el P. de T. de p en $x_0 = 3$, ent p es igual a q hasta el orden 2 en $x_0 = 3$.

13. ¿Porqué $R_{n,0}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ para $x \neq 0$ fijo.?

Si $x \neq 0$,

$$R_{n,0}(x) = h(x) - P_{n,0}(x)$$

$$= h(x). \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$= e^{-\frac{1}{x^2}} \neq 0.$$

<u>Af</u>: $\forall x \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^+ \quad h^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \left(\sum_{j=1}^{m_n} a_j \frac{1}{x^j} \right)$

$$h(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Lo probamos por inducción sobre $n \in \mathbb{N}^+$.

Para $n=1$:

$$h'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \left(+2\frac{1}{x^3}\right)$$

$$= e^{-\frac{1}{x^2}} \left(2\frac{1}{x^3}\right)$$

$$h''(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \left(2\frac{1}{x^3}\right)^2 + e^{-\frac{1}{x^2}} \left(-6\frac{1}{x^4}\right)$$

H.I. Sea que $h^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \left(\sum_{j=3}^{m_n} a_j \frac{1}{x^j}\right)$.

Calculamos ahora

$$h^{(n+1)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3} \left(\sum_{j=3}^{m_n} a_j \frac{1}{x^j}\right) + e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \left(\sum_{j=3}^{m_n} a_j (-j) \frac{1}{x^{j+1}}\right)$$

$$= e^{-\frac{1}{x^2}} \left[\sum_{j=3}^{m_n} 2a_j \frac{1}{x^{j+3}} - j \cdot a_j \cdot \frac{1}{x^{j+1}} \right]$$

que es una expresión de la forma

$$e^{-\frac{1}{x^2}} \left(\sum_{j=3}^{m_n} b_j \frac{1}{x^j} \right)$$, que es l.q.q.d.

5

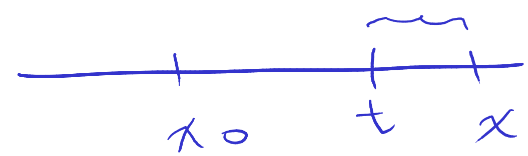
$$\frac{2^{2n+2}}{(2n+2)!} < 10^{-17}.$$

10. Sea $f(x)=e^x$. Sea P_{n,x_0} el Pol. de T. de grado n en torno a x_0 de f y sea R_{n,x_0} el residuo correspondiente.

Mostrar que $\forall x_0 \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}$ $\ R_{n,x_0}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Sabemos que $|R_{n,x_0}(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n \, dt \right|$

$$= \left| \int_{x_0}^{x} \frac{e^t}{n!} (x-t)^n \, dt \right|.$$



$$\leq \int_{x_0}^{x} \frac{e^t}{n!} |x-t|^n \, dt \leq \int_{x_0}^{x} \frac{e^t}{n!} |x-x_0|^n \, dt.$$

$$= \frac{|x-x_0|^n}{n!} \cdot \int_{x_0}^{x} e^t \cdot dt.$$

Mostraremos que: para cualquier real $y>0$,

$$\frac{y^n}{n!} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

<u>Observemos que:</u> si $y>0$ está fijo,

$$\frac{\frac{y^n}{n!}}{\frac{y^{n-1}}{(n-1)!}} = \frac{y^n}{y^{n-1}} \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{y}{n} \quad \forall n>1.$$

Tomamos N_1 de forma que $\frac{y}{N_1} < \frac{1}{2}$.

Ent $\forall n \geq N_1$, $\dfrac{\frac{y^n}{n!}}{\frac{y^{n-1}}{(n-1)!}} < \dfrac{1}{2}$.

$$0 < \frac{y^n}{n!} < \frac{1}{2} \cdot \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} \quad \forall n \geq N_1.$$

$$< \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{y^{n-2}}{(n-2)!}.$$

si $n-1 \geq N_1$

$$\vdots$$

$$< \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2}}_{n-N_1} \cdot \frac{y^{N_1}}{N_1!}.$$

$$= \frac{1}{2^{n-N_1}} \cdot \frac{y^{N_1}}{(N_1)!} = \frac{1}{2^n} \cdot \underbrace{\frac{2^{N_1} \cdot y^{N_1}}{(N_1)!}}_{\text{constante}}$$

Como esto ocurre $\forall n \geq N_1$, entonces por Teo. del Sándwich para sucesiones, se sigue que

$$\frac{y^n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

$$\therefore \left| R_{n,x_0}(x) \right| \leq \frac{|x-x_0|^n}{n!} \underbrace{\left| \int_{x_0}^{x} e^t\,dt \right|}_{\text{no depende de } n.} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$