$\therefore \quad e^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$ //

Teorema: Criterio de Cauchy para convergencia de sucesiones:

Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales, entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:

I $\exists L \in \mathbb{R}$ t.q. $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$.

II $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > m \geq N \ |a_n - a_m| < \varepsilon$.

Sucesiones monótonas.

Sea $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de núms. reales.

Decimos que:

(I) $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ es creciente sii

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq a_{n+1}.$$

(Esto equivale a que $\forall n, m \in \mathbb{N} \, (n \leq m \Rightarrow a_n \leq a_m)$)

(II) $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ es decreciente sii

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \geq a_{n+1}.$$

Ejs:

(I) $\left(1 - \frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ es creciente.

$$\left(0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots\right)$$

(II) $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n=0}^{\infty}$ es decreciente:

$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right)$.

<u>Proposición</u>: Si (a_n) es una sucesión, ent:

(i) Si (a_n) es creciente, entonces

a_n converge $\iff$ (a_n) está acotada superiormente.

En este caso, $a_n \xrightarrow{n\to\infty} \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

(ii) Si (a_n) es decreciente, entonces

a_n converge $\iff$ a_n está acotada inferiormente.

En ese caso, $a_n \xrightarrow{n\to\infty} \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Definición: Dada una sucesión $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$, definimos una subsucesión de $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$ como una composición de la forma

$$\alpha \circ f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

donde $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ es tal que:

$$n < m \implies f(n) < f(m) \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

$$(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \ldots)$$

Ej: $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots) = \alpha_n$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$(0, 2, 4, 6, 8, \ldots)$$

$$(\alpha_{n_0}, \alpha_{n_1}, \alpha_{n_2}, \alpha_{n_3}, \alpha_{n_4}, \ldots)$$

$$
\begin{tikzcd}[row sep=large]
\mathbb{N} & 0 \arrow[d, "f"'] & 1 \arrow[d] & 2 \arrow[d] & 3 \arrow[d] & 4 \arrow[d] & \cdots \\
\mathbb{N} & 0 \arrow[d, "\alpha"'] & 2 \arrow[d] & 4 \arrow[d] & 6 \arrow[d] & 8 & \\
\mathbb{R} & (0, & 2, & 4, & 6, & 8, & \ldots)
\end{tikzcd}
$$

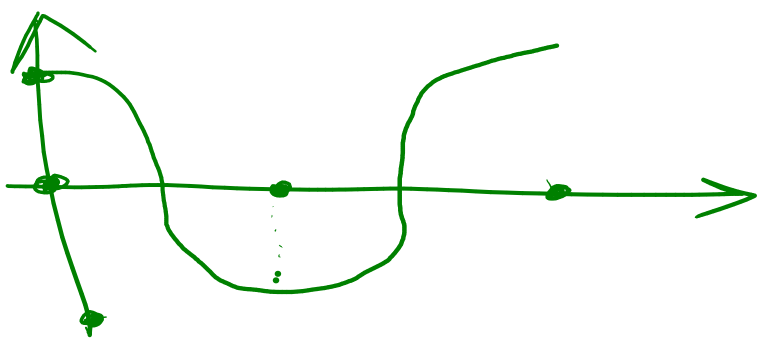
$\alpha \circ f$ es la sucesión

$(0, 2, 4, 6, 8, \ldots) \longrightarrow$ es una subsucesión de α.

Teorema: (Bolzano–Weierstrass)

Sea $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión acotada. Entonces (a_n) tiene una subsucesión que converge.

Ejemplo: La sucesión $\left(\cos(n\pi)\right)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada. Ent. por B-W, tiene una subsucesión convergente.



$\left(\cos(2n\pi)\right)_{n=1}^{\infty}$ es de hecho una subsucesión convergente.

__Ejemplo:__ Para $f(x) = e^x$, su pol. de Taylor de grado n en torno a $x_0 = 0$ es

$$P_{n,0}(x) := 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Éste es también es el Pol. de Taylor de el mismo.

Recordemos que, dada $x \in \mathbb{R}$ fija,

$$R_{n,0}(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Esto significa que, si $x \in \mathbb{R}$ está fijo,

entonces $$e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)$$

$$= R_{n,0}(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 .$$

Por lo tanto, para $x \in \mathbb{R}$ fija,

$$\underbrace{\left(1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)} \xrightarrow[n \to \infty]{} e^x$$

Es una sucesión en la que, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene la suma del término anterior en la sucesión más $\frac{x^n}{n!}$

$$\left(1,\ 1+x,\ 1+x+\frac{x^2}{2},\ \dots,\ 1+x+\dots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!},\ \dots\right)$$

Muy informalmente

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots$$

Pero las sumas infinitas como tal NO tienen sentido. Sin embargo, si una sucesión de sumas finitas como la del ejemplo converge, el límite puede interpretarse como si fuera la "suma infinita" de los términos en cuestión.

Series.

Ejemplos introductorios.

I Progresión geométrica:

Obs. Si $r \in \mathbb{R}$ es t.q. $r \neq 1$, ent:

$$(1+r+r^2+\dots+r^n)(1-r) = (1+r+\dots+r^n) - (r+r^2+r^3+\dots+r^n+r^{n+1})$$

$$= 1 - r^{n+1}.$$

Entonces:

$$1+r+r^2+\dots+r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}.$$

Si $0 \leq |r| < 1$, entonces $|r|^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$,

ent. $r^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

En este caso se tiene entonces que

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{1-r}$$

Esto se puede escribir como:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + r + r^2 + \cdots + r^n\right) = \frac{1}{1-r}$$

si $0 \leq |r| < 1$.

II $\frac{1}{3} = 0.3333\ldots$

$$= \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \cdots$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots + \frac{3}{10^n}\right)$$

(III) $e = e^1 = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right).$

Definición: Dada una sucesión $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ de números reales, definimos

(1) la suma parcial de los primeros $n+1$ términos de la sucesión como el número real

$$S_n := \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$$

(2) Si existe $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_n)$,

llamamos a este límite <u>la serie de los α_n's</u> y lo denotamos como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n := \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} \alpha_j\right).$$