Considerando a la sucesión $|r|^{n+1}$ tenemos que:

$$|r|^{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \iff$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ \Big| \, |r|^{n+1} - 0 \Big| < \varepsilon \iff$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ |r|^{n+1} < \varepsilon \iff$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ |r^{n+1} - 0| < \varepsilon \, . \iff$$

$|a \cdot b| = |a| \, |b|$.

$$r^{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$\therefore$ Si $0 \leq |r| < 1$, ent. $r^{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

Esto tiene como consecuencia que la sucesión

$$1+r+r^2+\cdots+r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$ converge a

$$\frac{1}{1-r}$$

$1+r+\cdots+r^n$ es la suma de los primeros $(n+1)$ términos de la sucesión $(r^n)_{n=0}^{\infty}$

La sucesión que converge a este número es

$$(1,\ 1+r,\ 1+r+r^2,\ 1+r+r^2+r^3,\ \ldots,\ 1+r+\cdots+r^n,\ \ldots)$$

Recordamos que llamamos

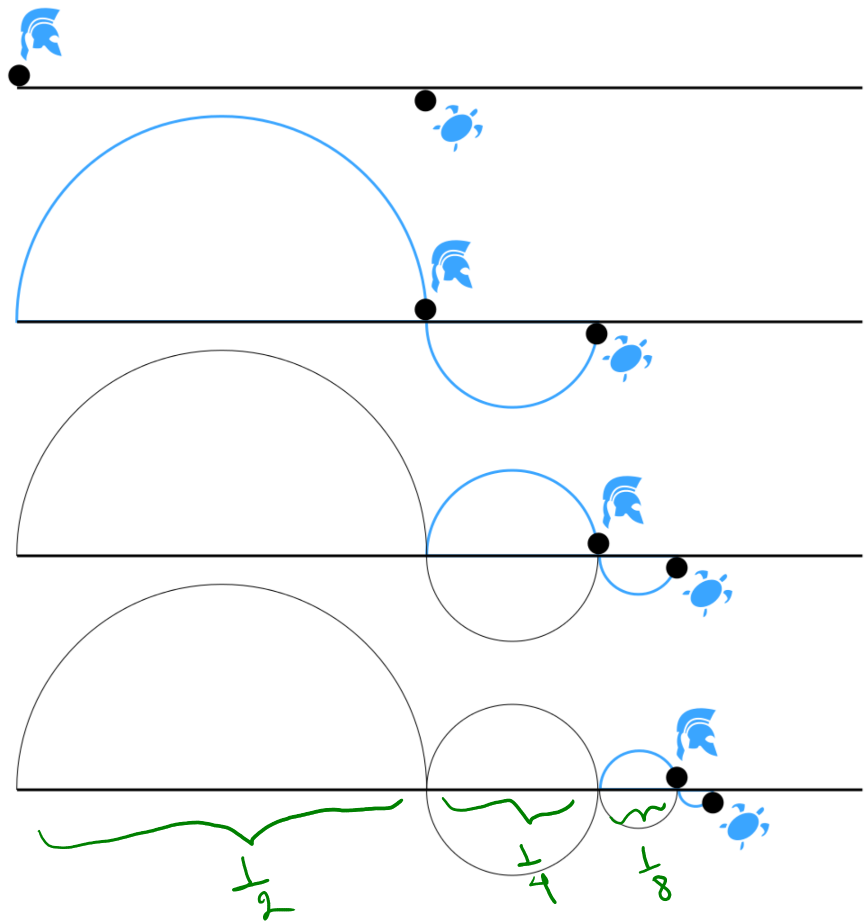
$$S_0 = \alpha_0$$

$$S_1 = \alpha_0+\alpha_1$$

$$\vdots$$

$$S_n = \alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_n = \sum_{j=0}^{n}\alpha_j$$

A S_n se le llama la <u>suma parcial</u> hasta el n-ésimo término de la sucesión $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$.



Para $r=\frac{1}{2}$

$r^1+r^2+\dots+r^n$

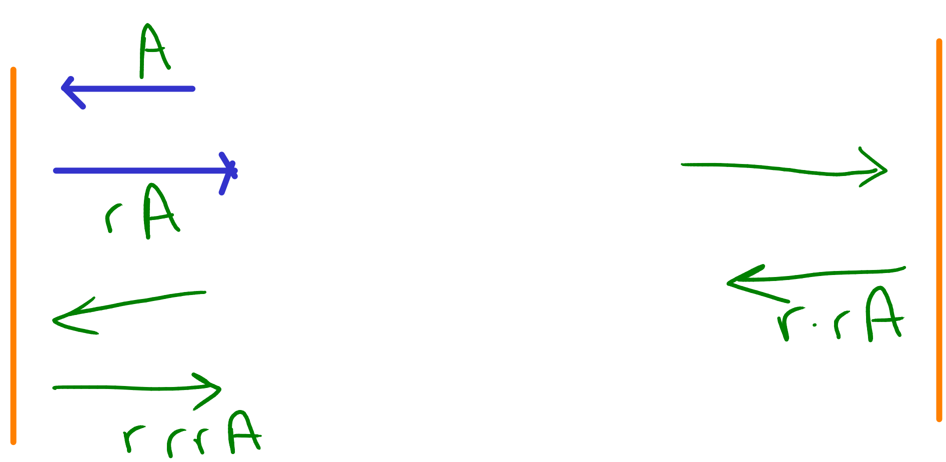
Si $1+r+\dots+r^n=\dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}$, entonces

$$r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r} - 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1-r} - 1 = \frac{r}{1-r}$$

Para $r = \frac{1}{2}$, $\frac{r}{1-r} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1$.

En notación de series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} r^n = \frac{r}{1-r}.$$



"Cantidad de luz" que queda es

$A + rA + r^2A + \dots + r^nA$.

En el límite esto es

$$A \sum_{n=0}^{\infty} r^n.$$

Serie telescópica.

Sea $\alpha_k = \frac{1}{k(k+1)}$. $\quad k \in \mathbb{N}^+$

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Obs. que dada $k \in \mathbb{N}^+$ fija:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) =$$

$$\left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}\right) + \cdots \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$1 - \frac{1}{n+1}$. para cada $n \in \mathbb{N}^+$.

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1 - 0 = 1.$$

Ent:
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

<u>Ejemplo:</u> Sea
$$a_k = \begin{cases} (-2)^k & \text{si } k \text{ es par} \\ 0 & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$$

con $k \in \mathbb{N}^+$.

$$\left(0, (-2)^2, 0, (-2)^4, 0, (-2)^6, \ldots\right)$$

$$S_1 = 0$$
$$S_2 = 0 + (-2)^2 = 4$$

$$S_3 = 0 + (-2)^2 + 0 = 4$$

$$S_4 = 0 + (-2)^2 + 0 + (-2)^4 = 4+16 = 20$$

$$S_5 = 0 + (-2)^2 + 0 \, (-2)^4 + 0 = S_4 = 20.$$

¿ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n$? No pues:

$\forall n \in \mathbb{N}^+$ $\quad S_{2n} = (-2)^2 + (-2)^4 + \cdots + (-2)^{2n} \geq 2^{2n}$

$\therefore$ (S_{2n}) no es acotada

$\therefore$ (S_n) tampoco es acotada.

<u>Definición</u>: Si $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión y

$S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$, decimos que la serie

$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ es convergente si y sólo si $\exists \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k$. En este caso escribimos

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k .$$

Teorema: Si $(\alpha_k)_{k=0}^{\infty}$ es una sucesión tal que $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ es convergente, entonces $\alpha_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

Equivalentemente si $\alpha_k \not\xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, entonces $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ no es convergente (es divergente).

Dem: Si $k \in \mathbb{N}$ es t.q. $k \geq 1$,

$$\alpha_k = (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k) - (\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{k-1}).$$

$$= S_k - S_{k-1}.$$

Sabemos que $\exists \lim\limits_{k\to\infty} S_k = \lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{j=0}^{k} \alpha_j = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \alpha_j.$

$(S_k) = (S_0, S_1, S_2, \ldots)$ $\quad k \geq 0$

$(S_{k-1}) = (S_1, S_2, S_3, \ldots)$ $\quad k \geq 1$

Como $\lim\limits_{k\to\infty} S_{k-1} = \lim\limits_{k\to\infty} S_k$, ent.

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_k = \lim_{k\to\infty} S_k - \lim_{k\to\infty} S_{k-1} = 0.$$

$\hookrightarrow$ pues ambos límites existen.

$\blacksquare$

¿Qué pasa con "el regreso" del resultado anterior?

<u>Ejemplo:</u> Sea $a_k = \frac{1}{k}$ $\forall k \in \mathbb{N}^+$.

Dada $n \in \mathbb{N}^+$:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$S_4 = \underbrace{1 + \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{4} \cdot 2} > 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2^2}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

En gral:

si $S_{2^r} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^r}$,

afirmamos que:

$$\boxed{\forall r > 1: \ S_{2^r} > S_{2^{r-1}} + \frac{1}{2}.}$$

En efecto,

$$S_{2^r} = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{r-1}}\right)} + \frac{1}{2^{r-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^r}.$$

$$> S_{2^{r-1}} + \frac{1}{2^r}\left(2^r - 2^{r-1}\right) = S_{2^{r-1}} + \frac{2^{r-1}(2-1)}{2^r}$$

$$= S_{2^{r-1}} + \frac{1}{2}. \qquad \forall r \geq 2$$

$$\Rightarrow S_{2^r} > S_{2^{r-1}} + \frac{1}{2} > S_{2^{r-2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$> \dots > \underset{\underset{2^{r-(r-2)}}{\shortparallel}}{S_{2^2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}\right)}_{(r-2) \text{ veces}}$$

$$> 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}\right)}_{r-2}$$

$$= 1 + \frac{r}{2}.$$

Por lo tanto, $S_{2^r} > 1 + \frac{r}{2} \quad \forall\, r \geq 2.$

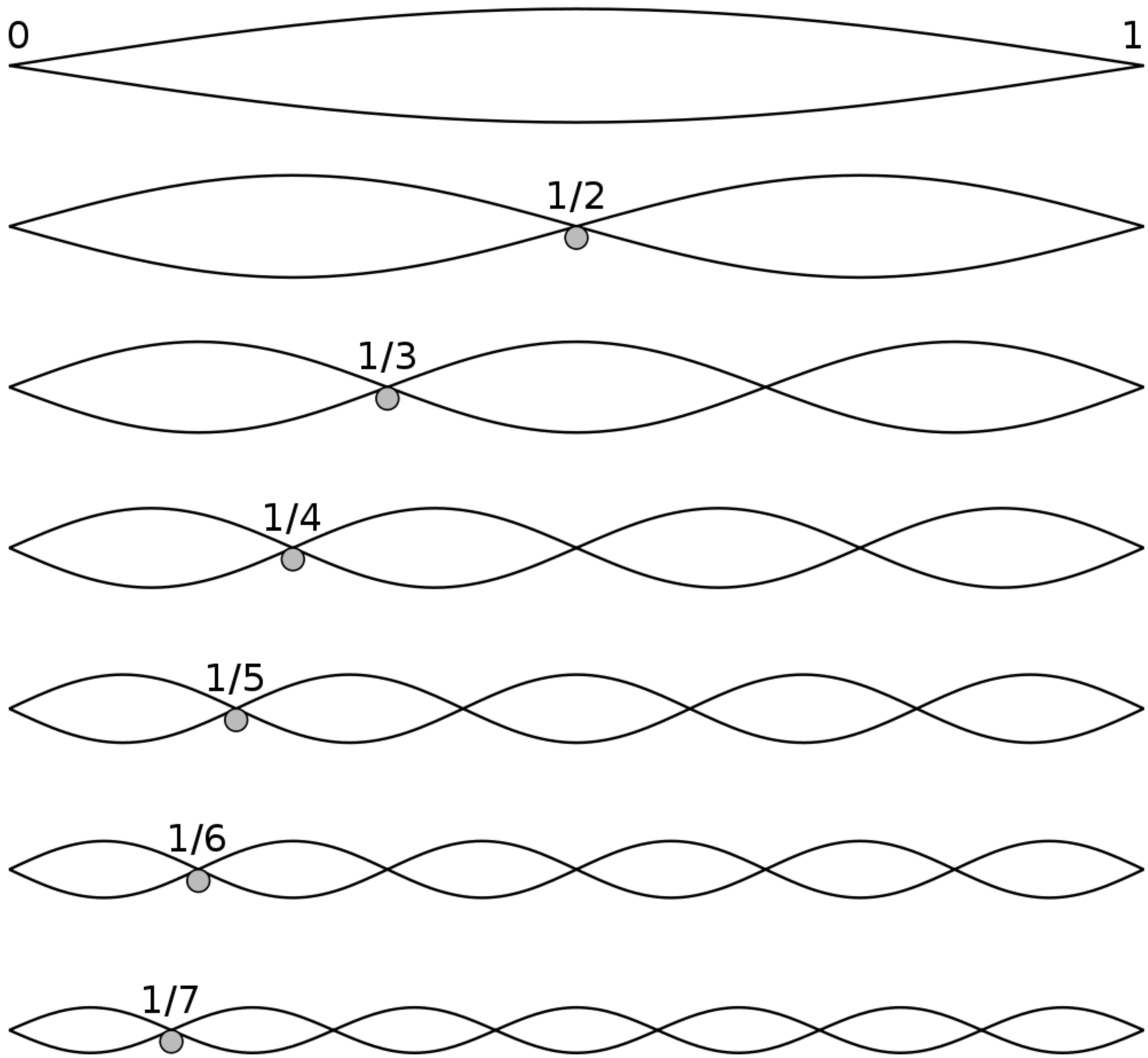
$$\therefore \quad S_{2^r} \xrightarrow[r \to \infty]{} \infty$$

$\therefore \ (S_n)_{n=1}^{\infty}$ no converge, es decir,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ no converge.} \rightsquigarrow \text{Serie armónica.}$$

En particular esto implica que

$$a_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \quad \not\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ converja.}$$



0
1
1/2
1/3
1/4
1/5
1/6
1/7

Teorema: Sup que $(\alpha_k)_{k=0}^{\infty}$ es una sucesión real.

Entonces: La sucesión de sumas parciales $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ es creciente si y sólo si $\alpha_k \geq 0 \ \forall k \in \mathbb{N}^+$.

Aquí recordamos que $S_n := \sum_{k=0}^{n} \alpha_k$.

Más aún, si $\alpha_k \geq 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$, ent. $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ converge si y sólo si está acotada superiormente.

Dem: Notemos que, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k = \alpha_{n+1}.$$

$\therefore$ $S_{n+1} - S_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \iff \alpha_{n+1} \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, es decir $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ es creciente $\Leftrightarrow$ $\alpha_k \geq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}^+$.

Esto implica que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ es convergente

si $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ es acotada superiormente y si $\alpha_k \geq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}^+$.

$\blacksquare$

<u>Ej:</u> La serie $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ es convergente pues

es una serie geométrica con $r = \frac{1}{2}$. Esto

significa que la sucesión de sumas parciales

es acotada

Criterios de comparación:

I **Teorema** Supongamos que $(\alpha_k)_{k=0}^{\infty}$ y $(\beta_k)_{k=0}^{\infty}$ son sucesiones tales que $\forall k \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \alpha_k \leq C \cdot \beta_k$$

con $C > 0$ una constante fija.

Si $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k$ es convergente, entonces $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ es convergente.

Dem: Como $\alpha_k \geq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$, por el resoltado anterior será suficiente ver que la sucesión

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \quad \text{es acotada superiormente.}$$

Nótese que, dado $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \leq C \cdot \sum_{k=0}^{n} \beta_k .$$

Como $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k$ es convergente y además $\beta_k \geq 0 \; \forall k \in \mathbb{N}$,

entonces la sucesión de sumas parciales

$$\tilde{S}_n = \sum_{k=0}^{n} \beta_k \quad \text{es acotada superiormente.}$$

$$\therefore \exists \, M > 0 \;\cdot\!\!\ni\; S_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \leq C \cdot \sum_{k=0}^{n} \beta_k \leq C \cdot M$$

Esto implica que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ es convergente. $\blacksquare$