Criterios de comparación:

I Teorema Supongamos que $(\alpha_k)_{k=0}^{\infty}$ y $(\beta_k)_{k=0}^{\infty}$ son sucesiones tales que $\forall k \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \alpha_k \leq C \cdot \beta_k$$

con $C > 0$ una constante fija.

Si $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k$ es convergente, entonces $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ es convergente.

Corolario: Si $(\alpha_k)_{k=0}^{\infty}$ y $(\beta_k)_{k=0}^{\infty}$ son sucesiones reales t.q. $0 \leq \alpha_k \leq C \cdot \beta_k$ p.a $C > 0$ y $\forall k \in \mathbb{N}$.

Si $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ es divergente, entonces $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k$ es divergente.

Ejemplos: ① Sabemos que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ es convergente

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k^2+k}.$$

[Sabemos que $k^2+k \sim k^2+a\cdot k+b$ $\forall a,b \in \mathbb{R}$. cuando $k \to \infty$ (i.e. $\frac{k^2+k}{k^2+ak+b} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$)]

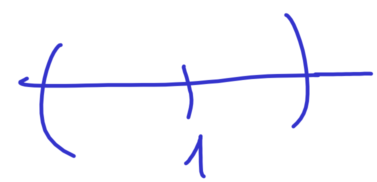
En particular

$$\frac{1}{k^2+k} \sim \frac{1}{k^2} \qquad \left(\frac{\frac{1}{k^2+k}}{\frac{1}{k^2}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1 \right)$$

Es de esperarse que $\exists C>0$

t.q.

$$\frac{1}{k^2} \leq C \cdot \frac{1}{k^2+k} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$



Afirmamos que $\frac{1}{k^2} \leq 2 \cdot \frac{1}{k^2+k}$.

Esto es así porque:

$$k^2+k \leq 2k^2,$$

que a su vez ocurre pues como $k \geq 1$, ent.,

$$k \leq k^2 \quad \forall k \geq 1.$$

Esto implica, por el Teo. anterior, que la serie

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ es convergente.

2 Sabemos que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ es convergente.

Además

$$\forall k \geq 1 \quad 0 \leq \frac{|\operatorname{sen}(k^2)|}{k(k+1)} \leq \frac{1}{k(k+1)}.$$

Ent. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\operatorname{sen}(k^2)|}{k(k+1)}$.

es convergente.

(3) $\forall k \geq 1 \quad 0 \leq \frac{1}{(k+1)!} \leq \frac{1}{k(k+1)}$

pues $k(k+1) \leq (k+1)!$

$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!}$ es convergente.

$\therefore \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ es convergente

Ya hemos visto que $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = P_{n,0}(1) \longrightarrow e$

con $P_{n,0}(x)$ el Pol. de Taylor de e^x

$\therefore \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e.$

Veamos que efectivamente $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ es convergente

a partir de que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!}$ es convergente.

P.D: $\exists \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

P.D: Si $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} =: S_n$, ent. $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ es acotada.

Dada $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \underline{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}} = 1+1+\underline{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)!}}$$

Como $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)!}$ es una suma parcial de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!}$,

que es convergente y de términos positivos, entonces

$\exists M > 0$ t.q. $\forall n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)!} \leq M$.

$\therefore S_n \leq 1 + 1 + M = 2 + M$.

$\therefore (S_n)_{n=0}^{\infty}$ es acotada.

$\therefore \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ es convergente.

Para una sucesión $(S_n)_{n=0}^{\infty}$, es equivalente que S_n sea convergente a que sea de Cauchy i.e:

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists N\in\mathbb{N} \ \forall n>m\geq N \ |S_n-S_m|<\varepsilon.$$

Si $S_n=\sum_{k=0}^{n} a_k$, entonces:

$$S_n-S_m=\sum_{k=0}^{n} a_k-\sum_{k=0}^{m} a_k=\sum_{k=m+1}^{n} a_k.$$

Teorema: Sea $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ una sucesión real. Entonces $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ es convergente si y sólo si

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists N\in\mathbb{N} \ \forall n>m\geq N \ \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right|<\varepsilon.$$

A este resultado se le llama <u>criterio de Cauchy</u> para convergencia de series.

<u>Obs:</u> En este criterio, $\alpha_k \in \mathbb{R}$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

<u>Teorema:</u> Si $(\alpha_k)_{k=0}^{\infty}$ es una sucesión real tal que la serie (de números no negativos)

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k| \quad \text{converge, entonces}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \quad \text{también converge.}$$

<u>Dem:</u> Supongamos que $(\alpha_k)_{k=0}^{\infty}$ es t.q. $\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k|$ es convergente.

Ent., por el Criterio de Cauchy para series,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > m \geq N \left| \sum_{k=m+1}^{n} |\alpha_k| \right| < \varepsilon$$

$$\therefore \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > m \geq N \ \sum_{k=m+1}^{n} |\alpha_k| < \varepsilon.$$

Nótese que $\forall n > m \in \mathbb{N}$, por desigualdad del triángulo.

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} \alpha_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |\alpha_k|$$

$$\therefore \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > m \geq N \ \left| \sum_{k=m+1}^{n} \alpha_k \right| < \varepsilon.$$

$\therefore$ Por el regreso en el Criterio de Cauchy, esto implica que $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ converge. $\blacksquare$

Ejemplo: Como $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\operatorname{sen}(k^2)|}{k(k+1)}$ es convergente

(por ejemplo 2 de arriba), entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(k^2)}{k(k+1)} \quad \text{es convergente.}$$

Definición: Si $(\alpha_k)_{k=0}^{\infty}$ es tal que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k|$ es convergente, decimos entonces que la serie de los α_k's converge absolutamente.

<u>Proposición:</u> Dado $p \in \mathbb{R}$, se tiene lo siguiente:

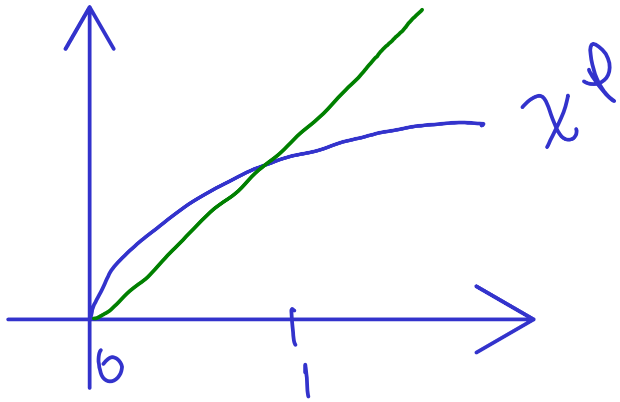
- Si $p \in (-\infty, 1]$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ es divergente
- Si $p \in (1, \infty)$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ es convergente.

<u>Dem:</u>

(I) Si $p \leq 0$, entonces $\frac{1}{k^p} \not\xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ no converge

- Si $p = 1$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ es la serie armónica y no converge.

- Si $p \in (0,1)$, ent. la función x^p se ve como  Ent, $\forall k \geq 1$,

$$\frac{1}{k^p} \geq \frac{1}{k}.$$

Como $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge, ent., $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ diverge.

II. Si $p \in (1, 2)$ más adelante mostraremos que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ converge.

- Si $p = 2$ ya vimos que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge.
- Si $p > 2$, entonces $\frac{1}{k^p} \leq \frac{1}{k^2}$ $\forall k \geq 1$.

$\therefore$ Por el Criterio de Comparación tendremos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \text{ es convergente.}$$