Teo. (de ayer).

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k| \text{ converge} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \text{ converge.}$$

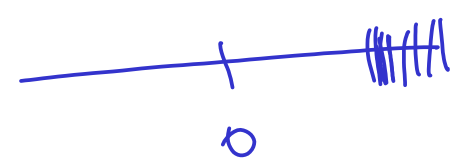
Criterio de convergencia de series alternantes (Leibniz).

Teorema: Sea $(u_k)_{k=0}^{\infty}$ una sucesión tal que:

(i) $u_k \geq 0$;

(ii) $u_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

(iii) $u_{k+1} \leq u_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$.



Entonces $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k u_k$ convergente.

Dem: Dado $n \in \mathbb{N}$, sea $S_n := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot u_k$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, notemos que

$$S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \cdot u_k = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \dots - u_{2n-1} + u_{2n} - u_{2n+1}$$

$$= u_0 - \underbrace{(u_1 - u_2)}_{\geq 0} - \underbrace{(u_3 - u_4)}_{\geq 0} - \dots - \underbrace{(u_{2n-1} - u_{2n})}_{\geq 0} - u_{2n+1}$$

$$\leq u_0 \quad \text{pues } u_k \geq 0 \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

$\therefore \ (S_{2n+1})_{n=1}^{\infty}$ está acotada superiormente (*)

Veamos que $(S_{2n+1})_{n=0}^{\infty}$ es creciente:

Dada $n \in \mathbb{N}$, notemos que

$$S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+3} (-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \cdot u_k$$

Los índices impares van con signo - y los pares con signo +

$$= -u_{2n+3} + u_{2n+2} \geq 0$$

por iii)

$\therefore (S_{2n+1})_{n=0}^{\infty}$ es creciente y, por $(*)$, podemos concluir que es una sucesión convergente.

Por otro lado, si $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq 1$, ent:

$$S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k u_k + u_{2n} = S_{2n-1} + u_{2n}$$

Como S_{2n+1} converge y $u_{2n} \longrightarrow 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} + 0 = \lim_{n\to\infty} S_{2n+1}.$$

Entonces $\exists \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n}$ $(**)$

por Lema de abajo.

$\therefore \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k u_k$ converge.

$\blacksquare$

Nota importante:

«Una serie convergente es el límite de una sucesión de sumas finitas»

Lema: Si $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión tal que $\exists \lim_{n\to\infty} x_{2n}$, $\exists \lim_{n\to\infty} x_{2n+1}$ y $\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = L$, entonces $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = L$.

Dems: Si $x_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} L$ y $x_{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} L$, ent:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_1 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N_1 \ |x_{2n} - L| < \varepsilon$. .... (1)

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_2 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N_2 \ |x_{2n+1} - L| < \varepsilon$ .... (2)

Sea $\varepsilon > 0$ arbitraria

Sea $N = \text{máx}\{2N_1, 2N_2+1\}$. Ent, $\forall k \geq N$ tendremos que:

<u>caso 1.</u> Si k es par, ent $k = 2n$ p.a. $n \in \mathbb{N}$,

y como $k \geq N$, $n \geq \frac{N}{2} \geq N_1$. Ent.

$$|x_k - L| = |x_{2n} - L| < \varepsilon.$$

<u>Caso 2:</u> Si k es impar, $\forall k \geq N$, tendremos que, si $k = 2n+1$, ent. $2n+1 \geq N$, ent

$$n \geq \frac{N-1}{2} \geq N_2.$$ Por tanto, por 2 se tiene que

$$|x_k - L| = |x_{2k+1} - L| < \varepsilon.$$

$\therefore\ \forall k \geq N \quad |x_k - L| < \varepsilon.$

$\therefore\ x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} L.$ $\blacksquare$

<u>Obs:</u>

$$\left\{\begin{array}{l} (-1)^k = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots) \text{ es t.q.} \\ (-1)^{2n} \longrightarrow 1. \ y \\ (-1)^{2n+1} \longrightarrow -1. \end{array}\right.$$

Otro ejemplo:

$(x_n) = (0, 2, 2, 0, 2, 2, 0, 2, 2, \dots)$

$x_{3n} \equiv 2 \longrightarrow 2$

$x_{3n-1} \equiv 2 \longrightarrow 2$

$x_{3n-2} \equiv 0 \longrightarrow 0.$

pero $x_k \not\longrightarrow 2$

Ejemplo del Teo. de Series Alternantes.

Si $u_k = \frac{1}{k}$ para $k \in \mathbb{N}^+$, ent:

(i) $u_k \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^+$

(ii) $u_k \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$ y

(iii) $u_{k+1} \leq u_k \quad \forall k \in \mathbb{N}^+$.

Por tanto, $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k} \text{ es convergente.}}$

Nótese que $\sum_{k=1}^{\infty} \left| (-1)^{k-1} \frac{1}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ es divergente.

Por tanto el recíproco del Teo. de series absolutamente convergentes, no es válido.

Ayer también vimos que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ converge si y sólo si $p > 1$.

Con el criterio de Leibniz podemos ver que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{\sqrt{k}}$$ converge pues:

$\frac{1}{\sqrt{k}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq 0 \ \forall k \geq 1$ y $\frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Recordar:
Si $0 \leq \alpha_k \leq C\beta_k$, ent. $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k$ conv. $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ conv.

Encontramos que $\frac{1}{k^2} \leq 2 \cdot \frac{1}{k(k+1)} \ \forall k \geq 1$.

¿Será que la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k^3+k^2+100k-80}{3k^5+9k^4-7k^2+70}\right)$ es convergente?

$$\frac{k^3+k^2+100k-80}{3k^5+9k^4-7k^2+70} \leq C\cdot\frac{1}{k^2}$$

(I) Criterio de comparación en forma de límite.

Sean $(\alpha_k)_{k=0}^{\infty}$ y $(\beta_k)_{k=0}^{\infty}$ sucesiones tales que $\alpha_k \geq 0$ y $\beta_k > 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Si $\exists \displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{\alpha_k}{\beta_k} = L$ con $0 < L < \infty$, entonces

$$\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k \text{ converge} \iff \sum_{k=0}^{\infty}\beta_k \text{ converge}.$$

Dem: Sup que $L \in (0,\infty)$ t.q. $L = \lim_{k\to\infty} \frac{\alpha_k}{\beta_k}$.

Como $L > 0$, tomamos $\varepsilon = \frac{L}{2}$ y, usando la def. de límite, tenemos que

$$\exists K \in \mathbb{N} \ \forall k \geq K$$
$$\left| \frac{\alpha_k}{\beta_k} - L \right| < \varepsilon = \frac{L}{2}.$$

$$\Rightarrow \exists K \in \mathbb{N} \ \forall k \geq K$$
$$-\frac{L}{2} < \frac{\alpha_k}{\beta_k} - L < \frac{L}{2}.$$

$$\Rightarrow \forall k \geq K \quad \frac{L}{2} < \frac{\alpha_k}{\beta_k} < \frac{3}{2} L.$$

$\Rightarrow \forall k \geq K$, como $\beta_k > 0$:

$$\frac{L}{2}\beta_k < \alpha_k < \frac{3L}{2} \cdot \beta_k .$$

Como $\forall k \geq K \; 0 < \alpha_k < \frac{3}{2} L \beta_k$, entonces por el Criterio de comparación I tenemos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \text{ convergente} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \text{ convergente.}$$

Por otro lado, como $\forall k \geq K \; 0 < \beta_k < \frac{2}{L} \alpha_k$, entonces

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \text{ convergente} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \text{ convergente.}$$

$\blacksquare$

Ejemplo: Afirmemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3+k^2+100k-80}{3k^5+9k^4-7k^2+70} \text{ es convergente.}$$

Notemos que

$$\frac{\dfrac{k^3+k^2+100k-80}{3k^5+9k^4-7k^2+70}}{\dfrac{1}{k^2}} = \frac{k^5+k^4+100k^3-80k^2}{3k^5+9k^4-7k^2+70}$$

$$\xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{3} > 0.$$

$\therefore$ Por el II. Criterio de Comparación, como $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3+k^2+100k-80}{3k^5+9k^4-7k^2+70}$ converge.