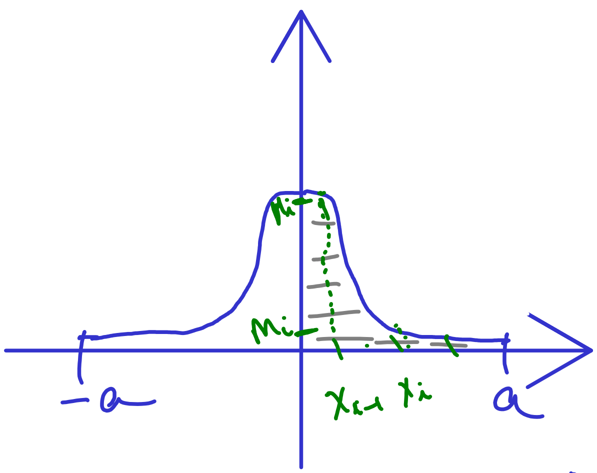
Tarea 4.

Ej. 8(a).

Sea $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ una función par, es decir

$\forall x \in [-a, a] \qquad f(x) = f(-x).$



Si f es integrable en $[0, a]$, entonces f es integrable en $[-a, a]$ y, además,

$$\int_{-a}^{a} f = 2 \int_{0}^{a} f.$$

Recordatorio: Por el criterio de int. de Riemann,

f es integrable en $[0,a] \iff$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists P \in \mathcal{P}[0,a]$ t.q. si $P=\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ con

$x_0=0$, $x_n=a$ y si

$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$;

$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, entonces

$$(*)\ S(P,f) - I(P,f) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Demostraremos que f es int. en $[-a,a]$:

Sea $\varepsilon>0$. Tomemos $P \in \mathcal{P}[0,a]$ t.q. se cumple $(*)$ y llamemos $P=\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$

Sea $\tilde{P} = \{-x_n, -x_{n-1}, \dots, -x_1, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$.

$= \{ y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, y_n, y_{n+1}, \dots, y_{2n-1}, y_{2n} \}$

Con $y_0 = -a$ y $y_{2n} = a$. Ent $\tilde{P} \in \mathcal{P}[-a, a]$.

Sean $\tilde{M}_i = \sup\{ f(x) : x \in [y_{i-1}, y_i] \}$ y

$\tilde{m}_i = \inf \{ f(x) : x \in [y_{i-1}, y_i] \}$.

para $1 \leq i \leq 2n$.

Nótese que, como f es par, ent:

$\{f(x) : x \in [y_0, y_1]\} = \{ f(x) : x \in [y_{2n-1}, y_{2n}]\}$.

$\{f(x) : x \in [y_1, y_2]\} = \{ f(x) : x \in [y_{2n-2}, y_{2n-1}]\}$

$\vdots$

$$\{f(x) : x \in [y_{n-1}, y_n]\} = \{f(x) : x \in [y_n, y_{n+1}]\}.$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{M}_1 = \tilde{M}_{2n}$$

$$\tilde{M}_2 = \tilde{M}_{2n-1}$$

$$\vdots$$

$$\tilde{M}_n = \tilde{M}_{n+1}$$

Por tanto, en general si $1 \leq i \leq n$, ent $\tilde{M}_i = \tilde{M}_{2n-i+1}$

Análogamente, si $1 \leq i \leq n$, ent $\tilde{m}_i = \tilde{m}_{2n-i+1}$.

Nótese también que si $1 \leq i \leq n$, entonces

$$y_i - y_{i-1} = y_{2n-i+1} - y_{2n-i+2}.$$

Por tanto,

$$S(\tilde{P}, f) - I(\tilde{P}, f) = \sum_{i=1}^{2n} (\tilde{M}_i - \tilde{m}_i)(y_i - y_{i-1}).$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\tilde{M}_i - \tilde{m}_i)(y_i - y_{i-1}) + \sum_{i=n+1}^{2n} (\tilde{M}_i - \tilde{m}_i)(y_i - y_{i-1})$$

$$\underset{\text{por } *}{=} 2 \cdot \sum_{i=n+1}^{2n} (\tilde{M}_i - \tilde{m}_i)(y_i - y_{i-1}).$$

$$= 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$= 2 \cdot (S(P, f) - I(P, f)).$$

$$< 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \text{------} \quad @$$

Ent f es integrable en $[-a, a]$.

Veamos que la fórmula para la integral es válida:

$$\int_{-a}^{a} f < S(\tilde{P}, f)$$
$$= 2 \cdot S(P, f)$$
$$< 2\left(I(P,f) + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$
$$= 2I(P,f) + \varepsilon$$
$$< 2 \cdot \int_{0}^{a} f + \varepsilon$$

$\Rightarrow \displaystyle\int_{-a}^{a} f < 2\int_{0}^{a} f + \varepsilon$ y tomando

lím cuando $\varepsilon \to 0$ se concluye que

$$\int_{-a}^{a} f \leq 2 \cdot \int_{0}^{a} f.$$

Por otro lado,

$$2\int_0^a f < 2\cdot S(P,f)$$

$$= S(\tilde{P},f).$$

$$< I(\tilde{P},f)+\varepsilon$$

$$\underset{\text{por } @}{\le} \int_{-a}^a f + \varepsilon$$

Tomando lím cuando $\varepsilon \longrightarrow 0$ se sigue que:

$$2\int_0^a f \le \int_{-a}^a f.$$

Juntando ambas desigualdades se concluye que

$$\int_{-a}^a f = 2\int_0^a f. \qquad \square$$