Definición: Si $(\alpha_k)_{k=0}^{\infty}$ es una sucesión y si $N \in \mathbb{N}$ está fijo, $(\alpha_k)_{k=N}^{\infty}$ es llamado una cola de la sucesión original.

Definición: Si $(\alpha_k)_{k=0}^{\infty}$ es una sucesión y si $M \in \mathbb{N}$ está fijo, una cola de la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ es

$$\sum_{k=M}^{\infty} \alpha_k := \lim_{N \to \infty} \sum_{k=M}^{N} \alpha_k$$

en caso de que este límite exista.

Proposición de las colas de series.

Las siguientes afirmaciones son equivalentes para una sucesión dada $(\alpha_k)_{k=0}^{\infty}$.

(I) La serie $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k := \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \alpha_k$ es convergente.

(II) $\forall M \in \mathbb{N}$ $\sum_{k=M}^{\infty} \alpha_k := \lim_{N\to\infty} \sum_{k=M}^{N} \alpha_k$ es convergente.

(III) $\exists M \in \mathbb{N}$ $\sum_{k=M}^{\infty} \alpha_k := \lim_{N\to\infty} \sum_{k=M}^{N} \alpha_k$ es convergente.

<u>Dem:</u> (I) $\Rightarrow$ (II)] Sup. que $\exists \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \alpha_k := L$.

Sea $M \in \mathbb{N}$ arbitraria. Si $M=0$, por hip (I), $\exists$ el límite $\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \alpha_k$.

Si $M>0$, escribimos, para toda $N>M$.

$$\sum_{k=M}^{N} \alpha_k = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k - \sum_{k=0}^{M-1} \alpha_k \xrightarrow[N\to\infty]{} L - \sum_{k=0}^{M-1} \alpha_k$$

$$\therefore \exists \lim_{N\to\infty} \sum_{k=M}^{N} \alpha_k =: \sum_{k=M}^{\infty} \alpha_k .$$

II $\Rightarrow$ III] Es claro pues es ir de lo más general a lo particular.

III $\Rightarrow$ I] Sup. que existe $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{k=M}^{N} \alpha_k$. con $M \in \mathbb{N}$ fijo.

P.D.: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ es convergente.

Notemos que, $\forall N > M \geq 1$.

$$\sum_{k=0}^{N} \alpha_k = \sum_{k=0}^{M-1} \alpha_k + \sum_{k=M}^{N} \alpha_k \text{ , por tanto,}$$

$$\exists \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \alpha_k = \sum_{k=0}^{M-1} \alpha_k + \lim_{N\to\infty} \sum_{k=M}^{N} \alpha_k \text{ , es decir } \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \text{ converge.}$$

$\square$

$(II \Rightarrow III)$

Si sabemos que $\exists \lim_{N\to\infty} \sum_{k=M}^{N} d_k$ y si $\tilde{M}>0$ es arbitraria

Notemos que:

<u>Caso 1:</u> $\tilde{M} < M$, ent $\sum_{k=\tilde{M}}^{N} d_k = \underbrace{\sum_{k=\tilde{M}}^{M-1} d_k}_{\text{no depende de } N} + \underbrace{\sum_{k=M}^{N} d_k}_{\text{depende de } N}$

Si $\underbrace{P \Rightarrow Q \wedge Q \Rightarrow R}$, $\wedge$ $R \Rightarrow P$, entonces

$P \Rightarrow R \wedge R \Rightarrow P$, ent $P \Leftrightarrow R$.

Por otro lado $Q \Rightarrow R \wedge R \Rightarrow P$ implica que $Q \Rightarrow P$ como $P \Rightarrow Q$, ent $P \Leftrightarrow Q$.

Criterio de convergencia del cociente para series.

(D' Alembert s. XVIII).

Sea $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ una sucesión t.q. $a_k > 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Supongamos que existe $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{a_{k+1}}{a_k} = L$.

Si $0 \leq L < 1$, entonces $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ converge.

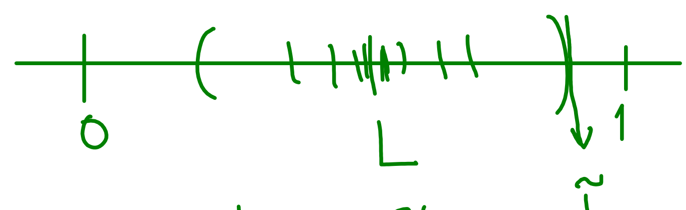
Si $L > 1$, entonces $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ diverge.

Si $L = 1$, el criterio no es concluyente.

<u>Dem:</u> Sup que $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{a_{k+1}}{a_k} = L \in [0, 1)$.

Fijemos M t.q. $0 \leq L < M < 1$.

Sea $\varepsilon := M - L > 0$



Para k grande $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} < \tilde{L}$

Aplicando la def. de límite para este $\varepsilon>0$, tenemos que $\exists N\in\mathbb{N}$ t.q $\forall k\geq N$

$\Rightarrow \forall k\geq K \quad \alpha_{k+1}<\tilde{L}\cdot\alpha_k$

$\alpha_{K+j}<\tilde{L}^j\cdot\alpha_K$

$$\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}-L\leq\left|\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}-L\right|<\varepsilon=M-L$$

$\boxed{\begin{array}{l}\forall y\in\mathbb{R}\\ -|y|\leq y\leq |y|\end{array}}$

Entonces: $\dfrac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}<M-L+L=M$

$\therefore \forall k\geq N \quad \alpha_{k+1}<M\alpha_k$. ---------- $(*)$

Inductivamente podemos ver que $\forall k\in\mathbb{N}$

$\alpha_{k+N}\leq M^k\cdot\alpha_N$: ---------- $(\ast)$

En efecto, si $k=0$, $\alpha_{0+N}=M^0\cdot\alpha_N$ ✓.

Si suponemos que $(\ast)$ es válido para k, ent.

$$0 < \alpha_{(k+1)+N} \underset{\substack{\text{por } (*) \\ \text{y } k+1+N > N}}{<} M \cdot \alpha_{k+N} \underset{H.I}{<} M \cdot M^{k} \cdot \alpha_N = M^{k+1} \alpha_N .$$

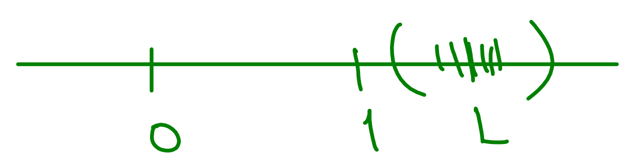
Por el criterio de comparación I, como $M \in (0,1)$ y ent. la serie $\sum_{k=0}^{\infty} M^k$ converge, entonces

$$\sum_{k=N}^{\infty} \alpha_k \text{ también converge.}$$

Ent, por la Prop. anterior, $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ converge.

Veamos ahora el caso en el que $\exists \lim_{k \to \infty} \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} = L > 1$.

En este caso, podemos tomar $M \in (1, L)$ fijo de modo que, para $\varepsilon := L - M > 0$



$$\exists N \in \mathbb{N} \ \forall k \geq N \quad \left| \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} - L \right| < \varepsilon =: L - M .$$

$$\Rightarrow \forall k \geq N \quad M - L < \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} - L$$

$\boxed{\text{Si } |y| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < y < \varepsilon .}$

$$\Rightarrow \forall k \geq N \quad M = (M - L) + L < \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} .$$

$$\Rightarrow \forall k \geq N \quad M \cdot \alpha_k < \alpha_{k+1} .$$

Inductivamente se puede ver que entonces

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad M^k \cdot \alpha_N \leq \alpha_{k+N} .$$

Como $M > 1$, ent. $M^k \xrightarrow[k \to \infty]{} \infty$, por tanto

$$\alpha_{k+N} \xrightarrow[k \to \infty]{} \infty$$

Ent. $\alpha_k \underset{k\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$. Por tanto $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ diverge.

Con $L=1$ se pueden dar casos en que la serie converja y casos en los que diverja.

Por ejemplo, si $\alpha_k = \frac{1}{k}$ para $k \geq 1$, ent

$$\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} = \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} = \frac{k}{k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1.$$

Recordemos aquí que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ es divergente.

Luego si $\alpha_k = \frac{1}{k^2}$ para $k \in \mathbb{N}^+$, ent. la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge y $\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} = \frac{\frac{1}{(k+1)^2}}{\frac{1}{k^2}} = \frac{k^2}{(k+1)^2} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1.$

Por tanto, el caso $L=1$ no nos da un criterio concluyente. $\square$

Obs: Si $r \in (0,1)$ y $\alpha_k := r^k$, entonces

$$\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} = \frac{r^{k+1}}{r^k} = r \xrightarrow[k\to\infty]{} r.$$

¿Podemos concluir con el criterio de D'Alembert que $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$ converge sin haberlo probado antes?

Ejemplo: Si $\alpha_k = \frac{10^k}{k!}$ $\forall k \in \mathbb{N}$, ent.

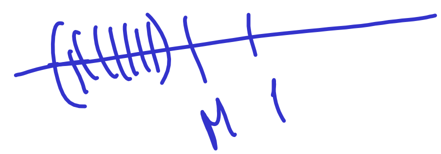
$$\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} = \frac{\frac{10^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{10^k}{k!}} = \frac{10^{k+1}\cdot k!}{10^k\,(k+1)!} = \frac{10}{k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Ent, por el criterio de D'Alembert

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{10^k}{k!} \quad \text{converge.}$$

De hecho, sabemos que $e^{10} = \lim\limits_{N \to \infty} \sum\limits_{k=0}^{N} \frac{10^k}{k!}$

Nota: En el criterio de D'Alembert es posible sustituir la existencia de el límite L por la siguiente condición:



$$\begin{cases} \text{Si } \limsup\limits_{k \to \infty} \dfrac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} = L \in [0,1), \text{ ent } \sum \alpha_k \text{ converge} \\[2em] \text{Si } \liminf\limits_{k \to \infty} \dfrac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} = L > 1, \text{ ent } \sum \alpha_k \text{ diverge.} \end{cases}$$