Criterio del cociente para convergencia de series.

Si $(\alpha_k)_{k=0}^{\infty}$ es una sucesión t.q. $\alpha_k > 0$ y

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} = L \in \mathbb{R}$$

Si $L \in [0,1)$, ent $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ converge

Si $L > 1$, ent. $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ diverge

Si $L = 1$ el criterio no es conclusivo. $\square$

El caso en el que $\lim_{k\to\infty} \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} = \infty$,

significa que

$$\forall M > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall k \geq N \quad \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} > M.$$

Ent, en particular para $M=2$ $\exists N \in \mathbb{N}$ $\forall k \geq N$

$$\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} > 2.$$

Ent $\forall k \geq N$ $\alpha_{k+1} > 2 \cdot \alpha_k$

Ent $\forall k \geq 1$ $\alpha_{N+k} > 2 \cdot \alpha_{N+k-1} > \dots > 2^k \cdot \alpha_N$

Ent $\alpha_{N+k} \xrightarrow[k \to \infty]{} \infty$

Ent. $\alpha_k \not\xrightarrow[k \to \infty]{} 0$

$\therefore \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ no converge.

Por tanto, en el criterio del cociente, el caso $L=\infty$ está incluido en el caso $L>1$.

Ejemplo: Sea $(d_k)_{k=0}^{\infty}$ tal que

$$d_k = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{k!}} & \text{si } k = 2^m \text{ p.a. } m \geq 1,\ m \in \mathbb{N}^+. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$\left(0, 0, \frac{1}{2^{2!}}, 0, \frac{1}{2^{4!}}, 0, 0, 0, \frac{1}{2^{8!}}, 0, 0, \ldots\right).$$

¿Es convergente $\sum_{k=0}^{\infty} d_k$?

Esta pregunta es equivalente a ver si $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{(2^m)!}}$ es convergente.

Sabemos que $\forall n \geq 4$, $2^n < n!$

Ent, con $n = 2^m$, $2^{2^m} < (2^m)!$ $\forall m \geq 2$

Ent. $\forall m \geq 2$ $\left(\frac{1}{2}\right)^{(2^m)!} < \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{2^m}}$.

Veamos con el criterio del cociente que

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2^{2^m}}} \text{ converge.}$$

$$\frac{\alpha_{m+1}}{\alpha_m} = \frac{\frac{1}{2^{2^{2^{m+1}}}}}{\frac{1}{2^{2^{2^m}}}} = \frac{2^{2^{2^m}}}{2^{2^{2^{m+1}}}} = \frac{2^{2\cdot 2\cdot m}}{2^{2\cdot 2\cdot (m+1)}}$$

$$\frac{1}{2^{4m+4-4m}} = \frac{1}{2^4} < 1.$$

$\therefore \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2^{2m}}}$ converge y ent. $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ converge

Corolario al criterio de D'Alembert.

Si $(\alpha_k)_{k=0}^{\infty}$ es tal que $\alpha_k \neq 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$ y

si $\lim_{k\to\infty} \left| \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} \right| = L$, entonces:

(1) Si $L \in [0,1)$, ent $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ converge absolutamente.

(2) Si $L > 1$ (posiblemente $L = \infty$), ent $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ no converge.

(3) Si $L=1$ el criterio no es concluyente.

Dems: Aplicando el criterio de D'Alembert a la sucesión $\left(|\alpha_k|\right)_{k=0}^{\infty}$, si

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|\alpha_{k+1}|}{|\alpha_k|} = L \in [0,1), \text{ ent. } \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k|$$

converge.

$\therefore \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ converge absolutamente.

Si $L = \lim_{k\to\infty} \frac{|\alpha_{k+1}|}{|\alpha_k|} > 1$, la prueba de D'Alembert dice que $|\alpha_k| \not\xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

Ent. $\alpha_k \not\xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Ent. $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ diverge.

Para $L=1$ sabemos que no podemos concluir nada acerca de la convergencia de la serie. $\square$

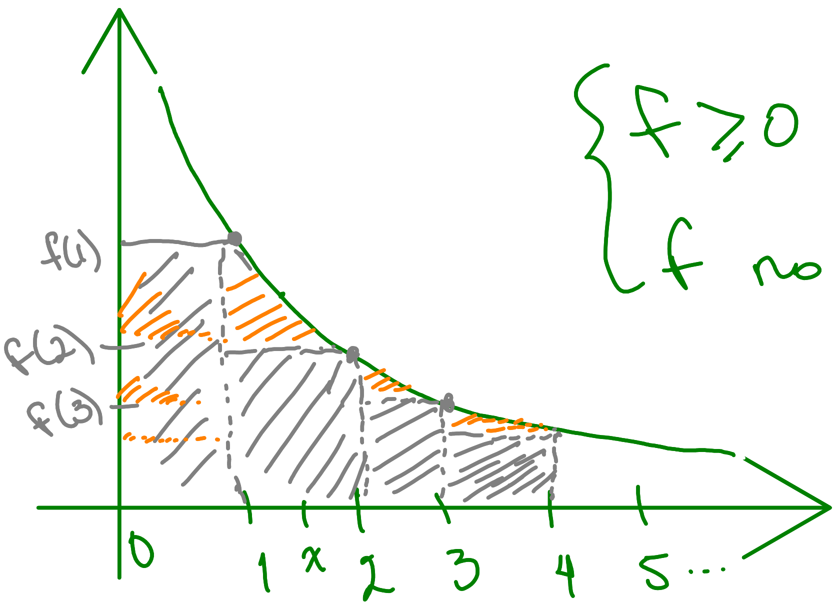
Ejemplo. Si $x \in \mathbb{R}$, ent, para $\alpha_k = \dfrac{x^k}{k!}$, se tiene que

$$\frac{|\alpha_{k+1}|}{|\alpha_k|} = \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!} \frac{k!}{|x|^k} = \frac{|x|}{k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Ent $\forall x \in \mathbb{R}$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ es absolutamente convergente.

Es posible definir a la función exponencial como

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$



$\begin{cases} f \geq 0 \\ f \text{ no creciente} \end{cases}$

Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ con $a_k = f(k)$

Para garantizar que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge podríamos pedir que $\int_1^{\infty} f\,dx < \infty$, es decir que

$\lim_{N \to \infty} \int_1^N f\,dx < \infty$.

Teorema: Criterio de la integral.

Sea $f:[1,\infty)\longrightarrow[0,\infty)$ una función no creciente (es decir, $\forall x,y\in[1,\infty)\ (x\leq y\Rightarrow f(y)\leq f(x))$).

Sup. también que f es integrable en $[k,k+1]$ $\forall k\in\mathbb{N}^+$.

Para $n\in\mathbb{N}^+$ dado, definimos

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}f(k) \quad \text{y} \quad I_n=\int_1^n f(x)\,dx.$$

Sea $\sigma_n=S_n-I_n$. Entonces σ_n converge a un límite σ y $0\leq\sigma\leq f(1)$

<u>Dem:</u> Como f es no creciente, entonces dada $k \in \mathbb{N}^+$, $\forall x \in [k, k+1]$ $\quad f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$.

Entonces, por monotonía de la integral, $\forall k \in \mathbb{N}^+$

$$f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k+1)\,dx \leq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq \int_k^{k+1} f(k)\,dx = f(k)$$

Ent:

$$f(2) \leq \int_1^2 f(x)\,dx \leq f(1)$$

$$f(3) \leq \int_2^3 f(x)\,dx \leq f(2)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx \leq f(n-1). \quad \forall n \geq 2.$$

Sumando estas desigualdades

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) - f(1) \underset{(I)}{\leq} \int_1^n f(x)\,dx \underset{(II)}{\leq} \sum_{k=1}^{n} f(k) - f(n)$$

De (I) se obtiene que

$$-f(1) \leq \int_1^n f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

Ent $\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\,dx \leq f(1)$.

Esto $\sigma_n = S_n - I_n \leq f(1)$

De (II) obtenemos que:

$$0 \leq f(n) \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\,dx = S_n - I_n.$$

Afirmamos que σ_n es creciente:

Dado $n \in \mathbb{N}^+$:

$$\sigma_{n+1} - \sigma_n = \sum_{k=1}^{n+1} f(k) - \int_1^{n+1} f(x)\,dx - \left(\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f\,dx\right)$$

$$= f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq 0$$

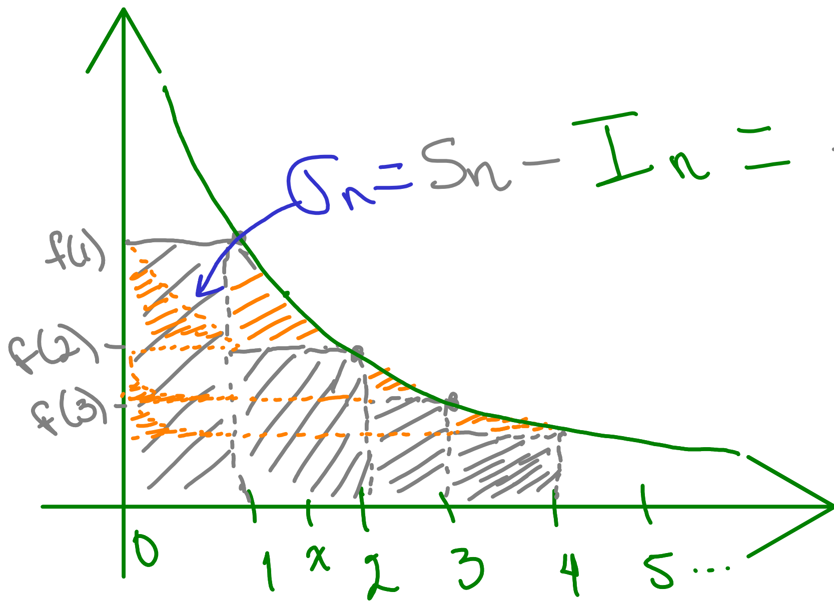
$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$$

$\therefore \sigma_{n+1} \leq \sigma_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

$\therefore \sigma_n$ es decreciente y está acotada inferiormente.

Ent. σ_n converge a algún $\sigma \in [0, f(1)]$.

$\square$



$$\underbrace{\sigma_n = S_n - I_n = f(1) - \underbrace{\text{suma de regiones naranja en el intervalo } [1,n].}_{\text{creciente}}}_{\text{decreciente.}}$$

<u>Corolario</u> Criterio de convergencia de series con la integral.

Sea $f : [1,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ no creciente t. q. $\int_k^{k+1} f(x)\,dx$ existe para toda $k \in \mathbb{N}^+$. Entonces:

$\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ converge si y sólo si $\lim_{N\to\infty} \int_1^N f(x)\,dx$ converge.