Teorema: Criterio de la integral.

Sea $f:[1,\infty)\longrightarrow[0,\infty)$ una función no creciente (es decir, $\forall x,y\in[1,\infty)\ (x\leq y \Rightarrow f(y)\leq f(x))$).

Sup. también que f es integrable en $[k,k+1]$ $\forall k\in\mathbb{N}^+$.

Para $n\in\mathbb{N}^+$ dado, definimos

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} f(k) \quad \text{e} \quad I_n=\int_1^n f(x)\,dx.$$

Sea $\sigma_n = S_n - I_n$. Entonces σ_n converge a un límite σ y $0\leq\sigma\leq f(1)$

Corolario Criterio de convergencia de series con la integral.

Sea $f:[1,\infty)\longrightarrow[0,\infty)$ no creciente t. q. $\int_k^{k+1} f(x)\,dx$ existe para toda $k\in\mathbb{N}^+$. Entonces:

$\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ converge si y sólo si $\lim_{N\to\infty}\int_1^N f(x)\,dx$ converge.

Dem: $\Rightarrow]$ Sup. que f es como en las hipótesis del corolario y que $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N} f(k)$ converge.

Ent, con S_N como en el Teo. anterior, $(S_N)_{N=1}^{\infty}$ converge.

Sea $I_N:=\int_1^N f(x)\,dx$. Entonces, por el Teo. anterior si $\sigma_n := S_N - I_N$ converge.

Por tanto $I_N = S_N - \sigma_n$ converge.

$\therefore \lim_{N\to\infty} \int_1^N f\,dx$ converge.

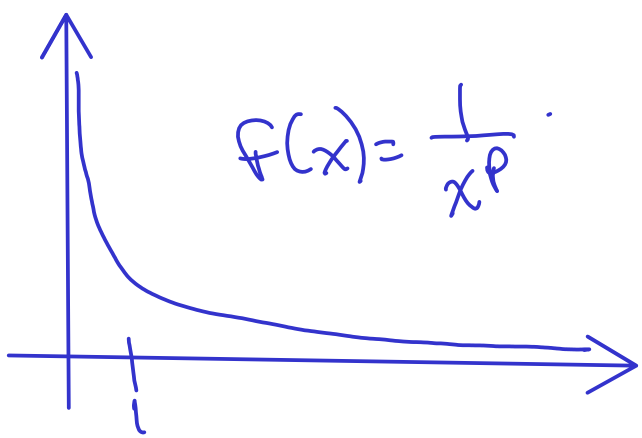
$\Leftarrow$ Si f es como en las hipótesis y $\lim_{N\to\infty} \int_1^N f\,dx$ converge, ent., usando la notación del Teorema anterior, $S_N = I_N + \sigma_n$ es convergente, es decir, $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ converge. $\square$

<u>Ejemplo.</u> Sea $f : [1, \infty) \to [0, \infty)$ definida como

$$f(x) = \frac{1}{x^p} \quad \text{con } p > 0 \text{ fijo.}$$

Dado $k \in \mathbb{N}^+$, $\quad f(k) = \frac{1}{k^p}$.

Nótese que, como $p > 0$, f es una función decreciente y es continua en $[1, \infty)$, de modo que en particular f es integrable en intervalos de la forma $[k, k+1]$ $\forall k \in \mathbb{N}^+$.



Ent; por el Corolario anterior,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \quad \text{converge}$$

si y sólo si existe $\int_1^{\infty} f \, dx$

$$\lim_{N \to \infty} \int_1^N f(x)\,dx = \lim_{N \to \infty} \int_1^N \frac{1}{x^p}\,dx$$

Nótese que, si $N \in \mathbb{N}^+$.

$$\int_1^N \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \left.\dfrac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^N & \text{si } p \neq 1,\ p>0 \\ \left.\log(x)\right|_1^N & \text{si } p=1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{N^{-p+1}}{-p+1} - \dfrac{1}{-p+1} & \text{si } p\neq 1,\ p>0. \\ \log(N) - \log(1) & \text{si } p=1. \end{cases}$$

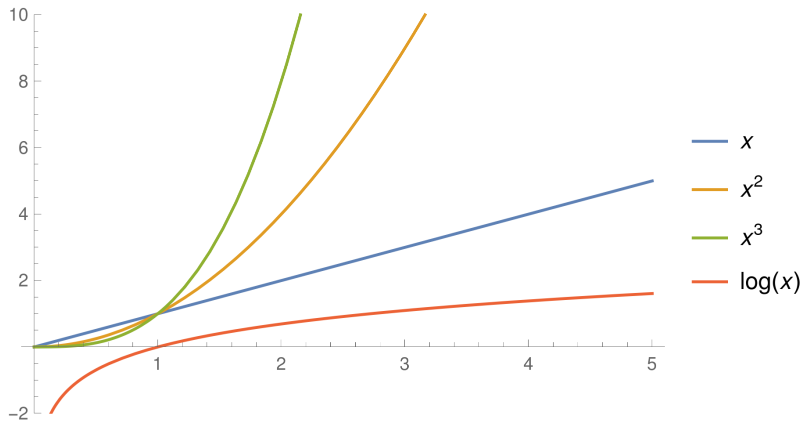
$$\therefore \lim_{N\to\infty} \int_1^N \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} -\dfrac{1}{-p+1} & \text{si } -p+1<0, \text{ ie. si } 1<p. \\ \infty & \text{si } -p+1>0. \\ \infty & \text{si } p=1. \end{cases}$$

$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ converge si i $1<p$.

Nota importante: El criterio anterior nos ha mostrado que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ diverge si $0<p\leq 1$.

Para $p<0$, el criterio no aplica pues $f(x)=\frac{1}{x^p}$ sería creciente. Sin embargo, anteriormente probamos que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ es divergente si $p\leq 0$, pues en ese caso $\frac{1}{k^p} \not\xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

Ejemplo. ¿Es la serie $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\cdot \log(k)}$ convergente?



Sea $f(x) = \dfrac{1}{x \cdot \log(x)}$ para $x \in [2, \infty)$

Ent, como x y $\log(x)$ son crecientes

esto implica que $f(x) = \dfrac{1}{x \cdot \log(x)}$

es decreciente.

Además, $f(x) > 0 \quad \forall x \in [2, \infty)$.

Ent, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \cdot \log(k)}$ converge $\iff$

$\displaystyle\lim_{N \to \infty} \int_2^N \frac{1}{x \cdot \log(x)}\, dx$ converge.

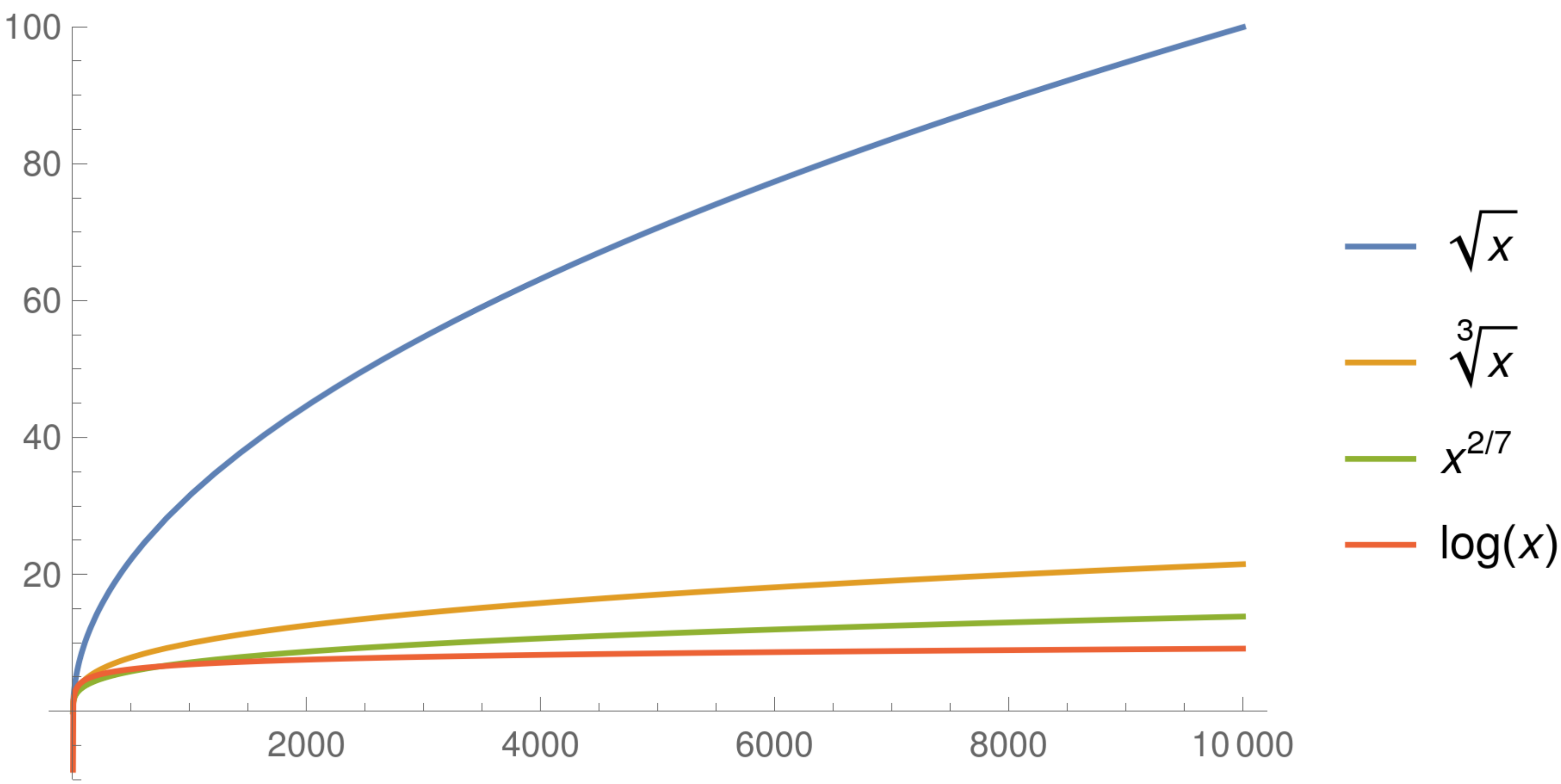
Si $N \in \mathbb{N}^+$, $N \geq 2$, ent. $\displaystyle\int_2^N \frac{dx}{x \cdot \log(x)} \underset{\substack{y = \log(x) \\ dy = \frac{1}{x} dx}}{=} \int_{\log(2)}^{\log(N)} \frac{dy}{y}$

$$= \log(y)\Big|_{\log(2)}^{\log(N)} = \log(\log(N)) - \log(\log(2)) \xrightarrow[N\to\infty]{} \infty .$$

La razón es que el logaritmo crece demasiado lento y no logra hacer que 1/(klog(k)) se vaya a cero suficientemente rápido para forzar a la serie a ser convergente.

$$\therefore \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\log(k)} \text{ no converge.}$$

$\square$



Noten que algunas de las raíces quedan por debajo del logaritmo para valores cercanos a 0 de x, pero eventualmente, el log(x) queda por debajo.

Una manera de probar esto formalmente es ver que, para p>0,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^p} = 0.$$

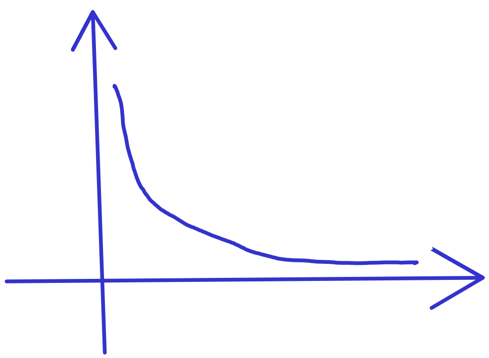
En particular:

$$\frac{\log(x)}{x^p} < 1$$

para x suficientemente grande.

Ejemplo: La constante de Euler.

Sabemos que si $f:[1,\infty) \to [0,\infty)$ es decreciente y continua en $[1,\infty)$ como puede ser $f(x) = \frac{1}{x}$,



ent. $\sigma_n = S_n - I_n$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{1}{x}\,dx$$

converge a algún $\sigma \in [0, f(1)] = [0,1]$.

Notemos que, en este caso,

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n) \longrightarrow \sigma$$

A σ se le llama la constante de Euler.

No se sabe si $\gamma \in \mathbb{Q}$ o si $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Esto significa que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$ a una razón similar a lo que $\log(n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$. (que, por cierto, no es muy rápido).

Ejemplo: Sea $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$

Sabemos que S_n converge por el Criterio de Leibniz.

$$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{2n}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \sigma_{2n} + \log(2n) - (\sigma_n + \log(n))$$

Con σ_n como en el ej. anterior. (de la serie armónica)

$$= \sigma_{2n} - \sigma_n + \log(2n) - \log(n)$$

$$= \sigma_{2n} - \sigma_n + \log\left(\frac{2n}{n}\right)$$

$$= \sigma_{2n} - \sigma_n + \log(2).$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \sigma - \sigma + \log(2) = \log(2).$$

Ent. $S_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \log(2)$.

Como sabemos que S_n converge, ent. $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \log(2)$

Ent. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k} = \log(2)$.

Ejemplo. Consideremos la serie infinita

$$\sum_{k=3}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$$

Tomamos $S_{2n} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$

$$= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)$$

$$> 0.$$

Por el C. de Leibniz, la serie converge y, entonces $(S_{2n})_{n=1}^{\infty}$ converge y, por lo anterior, $\lim_{n\to\infty} S_{2n} > 0$.

Consideremos ahora la serie

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{7} \cdots$$

Si esta serie fuera convergente, ent, la sucesión de sumas parciales siguiente convergería al mismo valor.

Consideremos:

$$(*) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{4n} - \frac{1}{4n+2}\right)$$

Notemos que, $\forall n \in \mathbb{N}^+$,

$$\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{4n} - \frac{1}{4n+2} = \frac{(4n)(4n+2) - (2n+1)(4n+2) - (2n+1)\cdot 4n}{(2n+1)(4n)(4n+2)}$$

$$= \frac{-4n-2}{(2n+1)(4n)(4n+2)} < 0.$$

Ent $(*) < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$.

$$\therefore \quad \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \cdots$$

es una serie que, si converge, converge a un número negativo.

Ent.

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \cdots \neq \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

Por tanto, en general, no es posible conmutar términos en las series infinitas.