12. Demuestra que la integral $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,dx$ es convergente pero $\int_0^\infty \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x}\,dx$ diverge.

Si se pudiera probar que $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\operatorname{sen}(k)}{k}\right|$ es convergente

entonces $\int_1^\infty \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x}\,dx$ sería convergente.

Si $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$, ent. $f'(x) = \frac{\cos(x)\cdot x - \operatorname{sen}(x)}{x^2}$

Ent. $f'(x) < 0 \iff \cos(x)\cdot x < \operatorname{sen}(x)$.

Si obtenemos una sucesión de intervalos ajenos

$[a_n, b_n] \subseteq [0,\infty)$ t.q. $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_n}^{b_n} \frac{|\text{sen}(x)|}{x} dx}$ $= \infty$.

Ent. $\int_0^{\infty} \frac{|\text{sen}(x)|}{x} dx$ diverge.

Este ejercicio se discutió de nuevo en los últimos (20 minutos de clase y la sugerencia correspondiente ya está en el archivo de la tarea.

8. (a) Si $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ es t.q. $k^2 a_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$, ¿entonces $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ es convergente?

Sí, el enunciado es V:

Demostración:

Como $k^2 a_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, ent.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall k \geq N \ |k^2 a_k - 0| = k^2 |a_k| < \varepsilon.$

En particular, para $\varepsilon = 1$, $\exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall k \geq N$

$$|a_k| < \frac{1}{k^2}.$$

Como $\sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge, entonces por el C. de comp. I, se sigue que $\sum_{k=N}^{\infty} |a_k|$ converge.

Entonces $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ converge y, por tanto, por convergencia absoluta, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge. $\square$

(b) Si $\sum a_k$ converge ent. $\sum a_k^2$ converge.

Hint: Es falso.