9(a) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ $\quad a_k = \dfrac{(2k+1)(3k-1)}{(k+1)(k+2)^2}.$ $\sim \dfrac{6k^2}{k^3} = \dfrac{6}{k}$

Definimos $b_k = \dfrac{1}{k}$ para cada $k \geq 1$.

Entonces $\forall k \geq 1$

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{(2k+1)(3k-1)}{(k+1)(k+2)^2} \cdot k =$$

Entonces $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{a_k}{b_k} = \dfrac{6}{1} = 6.$

pues si $p(x) = (2x+1)(3x-1)\cdot x$ y $q(x) = (x+1)(x+2)^2$, ent.

$\forall k \geq 1 \quad \dfrac{a_k}{b_k} = \dfrac{p(k)}{q(k)}.$

Como $\dfrac{p(x)}{q(x)} \xrightarrow[x \to \infty]{} 6$, ent $\dfrac{p(k)}{q(k)} \xrightarrow[k \to \infty]{} 6.$

Ent. $\lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{a_k}{b_k} = 6 > 0$ y como $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ es divergente, $a_k > 0$ y $b_k > 0 \; \forall k \geq 1$, ent. por C. de Comp. con Límites, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ es divergente.

$\square$

3 (iv). $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cdot (\log(n))^2}$.

Obs: Como $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log(n)^2} = 0$. entonces

$\exists M > 0$ t.q. $\forall n \geq 2$ se cumple que

$$\frac{1}{(\log(n))^2} < M.$$

Entonces $\forall n \geq 2$, $\displaystyle\frac{1}{n^2 \cdot (\log(n))^2} \leq \frac{M}{n^2}$.

Por C. de Comp. I, como $0 < \dfrac{1}{n^2 \log(n)^2} \leq \dfrac{M}{n^2}$

$\forall n \geq 2$, entonces, dado que $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{M}{n^2} = M \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

converge, ent. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log(n)^2}$ también converge.

¿Otra forma? Sea $a_n = \frac{1}{n^2 \log(n)^2}$ y $b_n = \frac{1}{n^2}$

$\forall n \geq 2$. Ent. $\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{\log(n)^2} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 = L$

No aplica el criterio de comp. con límites.

Con el Crit. de la integral se puede mostrar

que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente:

Calculamos $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx := \lim_{N \to \infty} \int_1^N \frac{1}{x^2} dx \underset{T.F.C.}{=}$

$$\lim_{N\to\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^N = \lim_{N\to\infty} -\frac{1}{N} + 1 = 1.$$

Ent. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

Luego, como $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\log(n))^2} = 0$, ent.

$$\exists M > 0 \quad \frac{1}{\log(n)^2} < M \quad \forall n \geq 2.$$

y, por tanto, por C. de Comp. 1,

$$\frac{1}{n^2 \log(n)^2} \leq \frac{M}{n^2}$$ genera una serie convergente.

$\square$

Para mostrar un crit de la int. que

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log(n)^2}$ converge, hay que mostrar que

$\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2 \log(x)^2} dx$ existe.

Como $\exists M > 0$ t.q. $\forall x \in [2, \infty)$ $\frac{1}{\log(x)^2} \leq M$,

entonces:

$\forall c \in \mathbb{R}$ con $c \geq 2$, se tiene que

$$0 \leq \underbrace{\int_2^c \frac{1}{x^2 \log(x)^2} dx}_{\varphi(c)} \leq M \cdot \int_2^c \frac{1}{x^2} dx \leq M \cdot \frac{1}{2}.$$

pues $\frac{1}{x^2} \geq 0$

y $\int_2^c \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}\Big|_2^c$

Como $0 \leq \dfrac{1}{x^2 \log(x)^2}$ $\forall x \geq 2$, entonces,

el mapeo $c \xmapsto{\varphi(c)} \displaystyle\int_2^c \frac{1}{x^2 \log(x)^2}\,dx$

es creciente, entonces,

$$\lim_{c \to \infty} \varphi(c) = \lim_{c \to \infty} \int_2^c \frac{1}{x^2 \log(x)^2}\,dx$$

existe si y sólo si φ es acotada superiormente. De hecho, en este caso,

$$\lim_{c \to \infty} \varphi(c) = \sup\{\varphi(c) : c \in [2, \infty)\}.$$

3(iii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log(n))^2}$ es convergente

por crit. de la int.

Comparar con $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log(n)}$, que diverge.

<u>Nota:</u> $\dfrac{1}{n\log(n)^2}$ es algo intermedio entre

$\dfrac{1}{n}$ y $\dfrac{1}{n^p}$ con $p>1$.

Para el ej. 6:

Si se prueba que la sucesión de sumas parciales $S_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ está acotada superiormente, como $\frac{1}{k!} > 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$

y, por tanto, S_n es creciente, entonces

S_n es convergente.

Ent $\exists \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} := e$

Proposición: Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ son tales que $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ con $l\in\mathbb{R}$ y si g es continua, entonces

$$\lim_{x\to\infty} g(f(x)) = g(l).$$

Si uno sabe que $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\cdot\log(x) = 0$, ent. por la Prop. anterior, como e^y es cont., ent.

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\cdot\log(x)} = e^0 = 1.$$

2 (iv).
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}^+$, definimos $a_n := \dfrac{3^n . n!}{n^n}$.

Entonces:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{3^n . n!}$$

$$= \frac{3(n+1) \cdot n^n}{(n+1)^n . (n+1)} = 3\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{e} > 1.$$

$\boxed{\text{En el 2(ii) probamos que } \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}.}$

Props. de límites de sucesiones

Si (β_n) es una sucesión t.q.

$\lim_{n\to\infty} \beta_n := L$, ent $\forall c \in \mathbb{R}$, ent.

$$\lim_{n\to\infty} c \cdot \beta_n = c \cdot L.$$

Ent., por el criterio de D'Alembert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n} \text{ diverge.}$$

$\square$

8(c). ¿Es cierto que si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge absolutamente ent. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ converge?

Sí: <u>Dem:</u>

Sup. $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ es convergente. Entonces

$$|a_k| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0.$$

Por lo tanto,

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall k \geq N \ |a_k| < \varepsilon.$

Sea $\varepsilon = 1$. Ent $\exists N \in \mathbb{N}$ $\forall k \geq N$

$|a_k| < 1$.

Ent $\forall k \geq N$ $0 \leq |a_k|^2 < |a_k| < 1$.

Ent., por Criterio de Comp I,

tendremos que

$$\sum_{k=N}^{\infty} |a_k|^2 \text{ converge}$$

pues $\displaystyle\sum_{k=N}^{\infty} |a_k|$ converge.

Entonces, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$ es convergente. (por Teo. de las colas de las series). $\square$

10 (a) $\sum_{k=1}^{\infty} k^{2020} \cdot x^k$.

$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \text{ converge abs. } \forall x \in \mathbb{R}.}$

Determinar si:

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k x^k|$ conv. $\forall x \in \mathbb{R}$

$\rightsquigarrow$ (ii) $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k x^k|$ converge sólo para $x = 0$

(iii) $\exists R > 0$ t.q si $|x| < R$ ent

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k x^k| \text{ converge y}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k x^k| \text{ diverge si } |x| > R.$$

Sea $x \in \mathbb{R}$ arbitraria.

Para cada $k \in \mathbb{N}^+$, definimos

$$a_k = k^{2020} \cdot x^k.$$

Entonces $\dfrac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \dfrac{(k+1)^{2020}|x|^{k+1}}{k^{2020} \cdot |x|^k} = \dfrac{(k+1)^{2020}|x|}{k^{2020}}$

Luego,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^{2020}}{k^{2020}} \cdot |x|.$$

$$= |x| \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^{2020}}{k^{2020}} = |x|$$

pues el lím existe.

Entonces, $\sum_{k=1}^{\infty} k^{2020} x^k$ converge absolutamente siempre que $|x| < 1$.

y la serie $\sum_{k=1}^{\infty} k^{2020} |x|^k$ diverge si $|x| > 1$.

$\square$