De la Tarea 6:

10 (d). $\sum_{k=1}^{\infty} k^k x^k$.

La sucesión $(k\cdot|x|)^k = e^{\ln((k|x|)^k)} =$

$e^{k\cdot\ln(k|x|)} \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$.

siempre que $x\neq 0$.

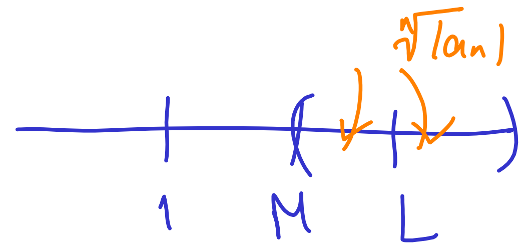
Obs: Si $\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} \longrightarrow \infty$

Ent. $\forall M>1\ \exists N\in\mathbb{N}$ t.q $\forall k\geq N$

$\alpha_{k+1} > M\cdot\alpha_k > \alpha_k$. Ent. $\alpha_k \not\xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

11 (b). Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$, con $L>1$,

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.



<u>Dem:</u> Sea $1<M<L$,

Sea $\varepsilon = L-M>0$ Ent $\exists N\in\mathbb{N}$ $\forall n\geq N$

$$\left|\sqrt[n]{|a_n|} - L\right| < \varepsilon = L-M.$$

Ent $-\varepsilon = M-L < \sqrt[n]{|a_n|} - L \quad \forall n\geq N.$

Ent. $M<\sqrt[n]{|a_n|}$. $\quad \forall n\geq N$.

Ent. $M^n<|a_n|$.

Ent, como $M>1$, $M^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

Ent. $|a_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

Ent $|a_n| \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. y ent. $a_n \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Por tanto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no converge. $\square$

Construcción de funciones especiales en Cálculo.

$$\underbrace{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 10}_{n \text{ veces}} \cdot \underbrace{10 \cdot \ldots \cdot 10}_{m \text{ veces}} = 10^n \cdot 10^m.$$

$$= 10^{n+m} \quad \text{veces} \qquad \text{con } n, m \in \mathbb{N}^+.$$

Se empieza a buscar en el s. XVII (Reino Unido) una forma de generalizar esta idea de "multiplicar sumando".

Se busca una función tal que

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y).$$

Para conocer $x \cdot y$, se suma $f(x)+f(y)$ y al resultado se le aplica la función "anti-f". (formalmente esto corresponde con la inversa de f).

La idea detrás de una función f con estas características es que, dada una base, por ej. 10,

$$f(b) = x \quad \text{si y sólo si} \quad 10^x = b.$$

Suponiendo que f fuera invertible con inversa g, si $z = f(x)$ y $w = f(y)$, ent.

$$g(z+w) = g(f(x \cdot y)) = x \cdot y = g(z) \cdot g(w).$$

Queremos además que $g \not\equiv 0$.

$g(w)$ tiene que ser como una exponenciación.

En particular, si $g(0)$ es como "elevar a la cero", ent. $g(0) = 1$.

Podemos querer que $g(1) = 10$.

Si g fuera una función derivable, tendría que ocurrir

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{g(x) \cdot g(h) - g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} g(x) \cdot \frac{g(h) - 1}{h}$$

$$= g(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - 1}{h}$$

si el lím. existe

Nótese que $\forall x$ $\lim_{h \to 0} \frac{g(h)-1}{h}$ es independiente de x, de modo que, si tal límite existe y lo llamamos $\alpha := \lim_{h \to 0} \frac{g(h)-1}{h}$, lo anterior nos dice que ent

$$\boxed{g'(x) = \alpha \cdot g(x).}$$

Regresando a buscar definir rigurosamente a f, tenemos que:

$$f'(x) = (g^{-1})'(x) \underset{\text{T.F. inversa.}}{=} \frac{1}{g'(g^{-1}(x))}$$

$$= \frac{1}{\alpha \cdot g(g^{-1}(x))} = \frac{1}{\alpha \cdot x}.$$

Para cada $y > 0$, podemos definir

$$\boxed{f(y) := \int_1^y \frac{1}{\alpha x}\, dx \in \mathbb{R}.}$$

Definición: Definimos a la función **logaritmo natural** denotada por log como:

$$\log : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\log(y) := \int_1^y \frac{1}{x}\,dx.$$

Obs: · Si $y \in (0,1)$, ent. $\int_1^y \frac{1}{x}\,dx := -\int_y^1 \frac{1}{x}\,dx.$

· Como $\frac{1}{x} > 0 \ \forall x > 0$, entonces la función

$f(y) := \log(y)$. es **estrictamente creciente:**

$$\forall y_1, y_2 \in (0,\infty) \ (y_1 < y_2 \Rightarrow f(y_1) < f(y_2)).$$

En particular, f es inyectiva.

<u>Teorema:</u> $\forall x, y \in (0, \infty)$ se tiene que

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y).$$

<u>Dem:</u> Sea $y > 0$ fijo y arbitrario.

Definamos $\tilde{f}(x) := f(x \cdot y)$.

Por def. de f y por T.F.C, como $\frac{1}{x}$ es continua en $(0,\infty)$, ent. f es derivable en su dominio. y, por tanto, $\tilde{f}$ también es derivable en $(0,\infty)$ y

$$\tilde{f}'(x) = f'(x \cdot y) \cdot y.$$

$$\underset{\text{T.F.C.}}{=} \frac{1}{x \cdot y} \cdot y.$$

$$= \frac{1}{x}$$

También sabemos que $f'(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x > 0$ (por el T.F.C.).

Por tanto, $\tilde{f}(x) = f(x) + c$, con $c \in \mathbb{R}$ constante.

Por tanto, $\forall x > 0$

$$\tilde{f}(x) = f(x \cdot y) = f(x) + c.$$

En particular, para $x = 1$,

$$f(y) = f(1 \cdot y) = f(1) + c.$$

Como $f(1) = \int_1^1 \frac{1}{x}\,dx = 0$, entonces

$$c = f(y).$$

$$\therefore \quad f(x \cdot y) = f(x) + f(y).$$

$\square$

Notemos que esto implica que

$$f(x^2) = 2 \cdot f(x).$$

Inductivamente se puede ver que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$f(x^n) = n \cdot f(x).$$

Corolario: $\forall x, y > 0 \quad \log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$.

Dem: Si $x, y > 0$, entonces

$$\log(x) = \log\left(\frac{x}{y} \cdot y\right) \underset{\text{Teo.}}{=} \log\left(\frac{x}{y}\right) + \log(y)$$

$$\therefore \log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y). \qquad \square$$

De las propiedades anteriores podemos concluir que:

$$\log(2^n) = n \cdot \log(2) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

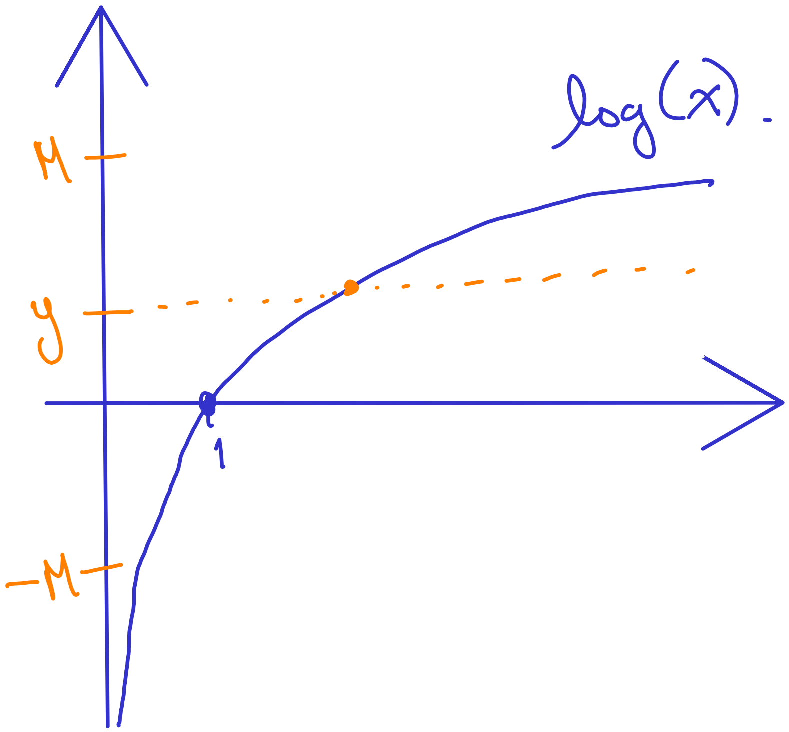
Por lo tanto, log no está acotada superiormente.

Por otro lado,

$$\log\left(\frac{1}{2^n}\right) = \cancelto{0}{\log(1)} - \log(2^n).$$

$$= -\log(2^n) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty.$$

Por lo tanto, log no está acotada inferiormente.



Por T.V.I, $Im(\log) = \mathbb{R}$.

Ent. $\log : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

es biyectiva.

Ent. log es invertible en $(0,\infty)$

<u>Definición</u>: Definimos a la función

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow (0,\infty)$$

como la inversa de la función logaritmo natural. log.