12. (i) $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,dx$ converge.

Sean $1 < a < b$ fijos. Entonces:

$$\int_a^b \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,dx = -\frac{\cos(x)}{x}\Big|_a^b - \int_a^b \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx.$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad y \quad g'(x) = \operatorname{sen}(x)$$

$$g(x) = -\cos(x)$$

$$= \frac{\cos(a)}{a} - \frac{\cos(b)}{b} - \int_a^b \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx.$$

Nótese que $\frac{|\cos(b)|}{b} \leq \frac{1}{b}$. Por tanto por Teo. del Sándwich $\lim\limits_{b\to\infty} \frac{\cos(b)}{b} = 0$

Ahorita regresamos a que $\exists \int_a^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2}\, dx$.

Esto implicaría que $\lim_{b \to \infty} \int_a^b \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\, dx$ existe

Ent. $\int_a^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\, dx$ converge.

Veamos ahora que $\forall\, b > 0$, $\int_0^b \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\, dx$ existe

y es finita:

Dado $b > 0$ fijo, notemos que:

como $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$, por lo que si definimos $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} & \text{si } x \in (0, b], \end{cases}$

entonces f es continua en $[0, b]$ y, por tanto es integrable, de modo que

$$\int_0^b f(x)\,dx = \int_0^b \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,dx \in \mathbb{R}.$$

Lo anterior $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,dx$ existe.

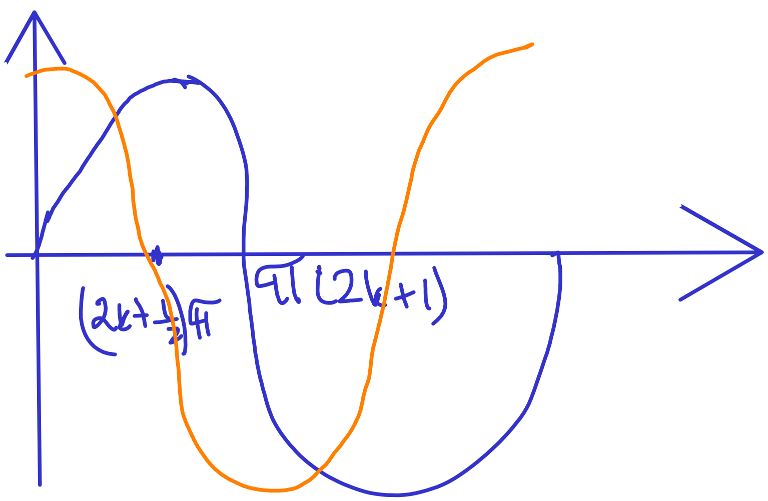
$$\underbrace{\frac{1}{x}\Big|_a^b}_{= \frac{1}{b} - \frac{1}{a}} = -\int_a^b \frac{1}{x^2}\,dx \leq \int_a^b \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx \leq \int_a^b \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_a^b$$

$$= \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

(ii) P.D. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x}\,dx$ es divergente.

Veamos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{(2k+\frac{1}{2})\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x}\,dx \quad \text{es divergente.}$$



$$\int_{(2k+\frac{1}{2})\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x}\,dx \underset{\substack{\text{pues } \operatorname{sen}(x)\geq 0\\ \text{en el intervalo}}}{=} \int_{(2k+\frac{1}{2})\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,dx \underset{(i)}{=}$$

$$\frac{\cos((2k+\frac{1}{2})\pi)}{(2k+\frac{1}{2})\pi} - \frac{\cos((2k+1)\pi)}{(2k+1)\pi} + \int_{(2k+\frac{1}{2})\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{-\cos(x)}{x^2}\,dx$$

$$\geq \frac{\cos\left(\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi\right)}{\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi} - \frac{\cos((2k+1)\pi)}{(2k+1)\pi}$$

$-\cos(x) \geq 0$
en el intervalo

$$= 0 + \frac{1}{(2k+1)\pi} = \frac{1}{(2k+1)\pi}.$$

Como la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ es divergente, si definimos para $k \geq 1$ $a_k := \frac{1}{k}$ y $b_k := \frac{1}{(2k+1)\pi}$, se tiene que $\frac{a_k}{b_k} = \frac{(2k+1)\pi}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 2\pi \in (0,\infty)$.

Entonces, por el criterio del límite,

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)\pi}$ también es divergente.

Luego,

dado $M>0$ arbitrario, tomamos $N \in \mathbb{N}^+$ t.q.

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{(2k+1)\pi} > M$$ y tomamos $b>0$ con $b>N$,

de modo que:

$$\therefore \int_{\frac{\pi}{2}}^{b} \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x}\,dx \geq \int_{\frac{\pi}{2}}^{(2N+1)\pi} \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x}\,dx.$$

$$\geq \sum_{k=0}^{N} \int_{(2k+\frac{1}{2})\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x}\,dx \geq \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{(2k+1)\pi} > M$$

$$\forall M>0 \quad \exists\, b>0 \quad \forall\, \tilde{b}>b \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\tilde{b}} \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x}\,dx > M.$$

Ent. $\lim\limits_{b \to \infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^{b} \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x}\, dx = \infty.$

$\therefore \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x}\, dx$ diverge.

$\therefore \int_{0}^{\infty} \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x}\, dx$ diverge.

$\square$

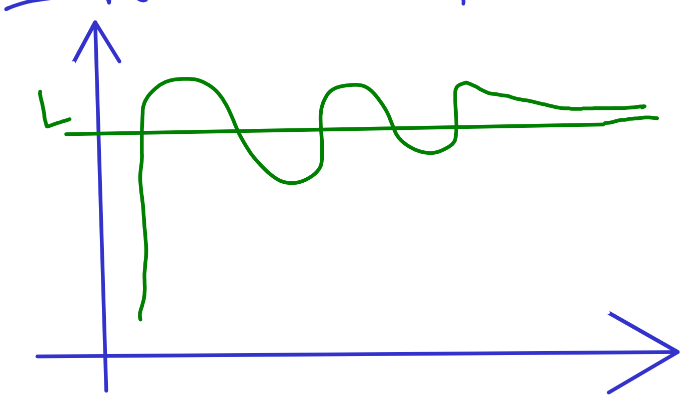
13. Buscamos $f \geq 0$ t.q.

$\int_0^\infty f(x)\,dx$ existe y es finita pero

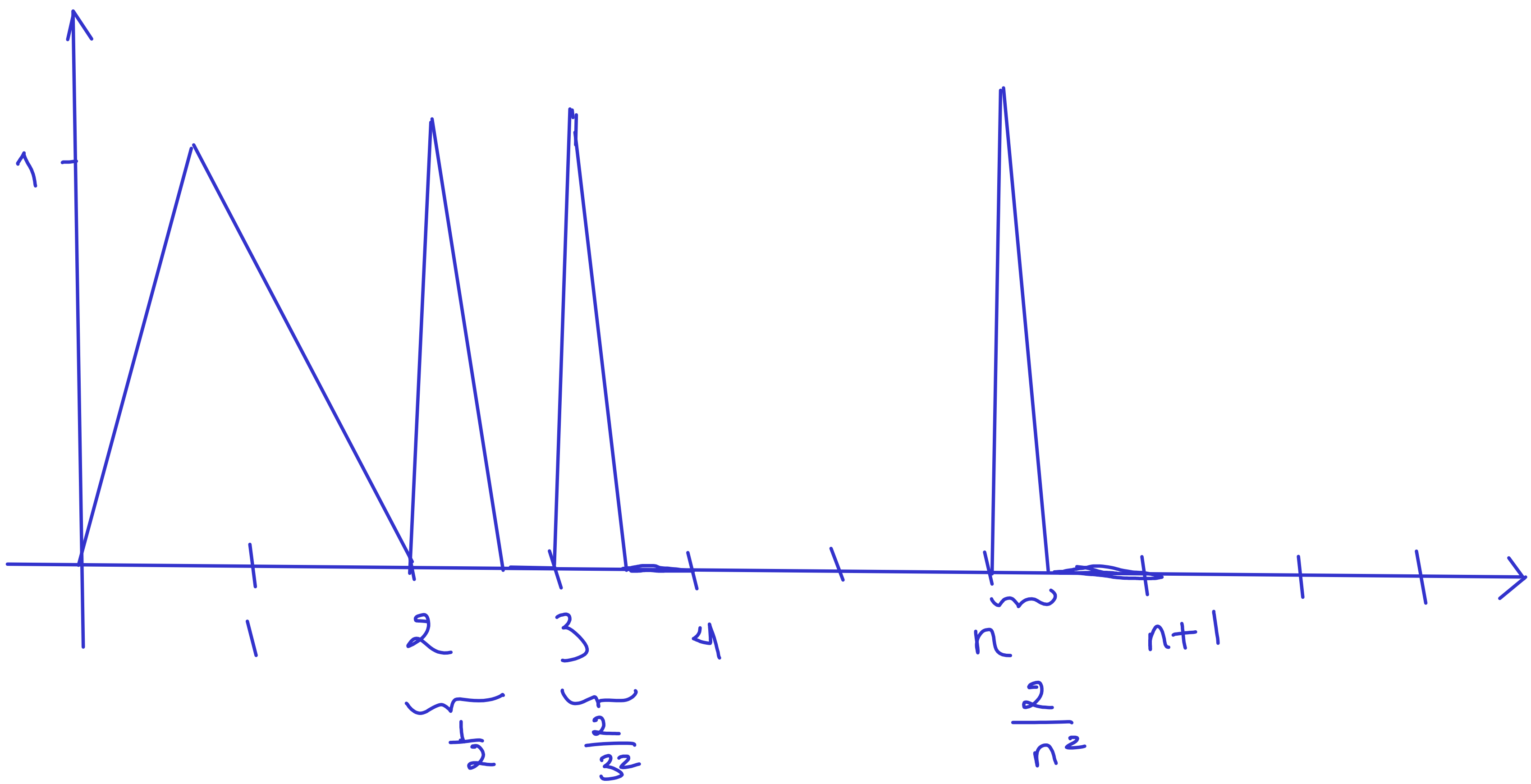
no existe $\lim_{x \to \infty} f(x)$.

Recordemos que $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ significa

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists K > 0$ t.q $\forall x > K \ |f(x) - L| < \varepsilon$.



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{converge.}$$



La gráfica de esta función es un triángulo de altura 1 y base $\frac{2}{n^2}$ en cada intervalo de la forma $[n, n+1]$ de modo que la función vale 0 fuera de la base del triángulo y f es continua en $(0,\infty)$.

Además, $\forall n \geq 2$, $f(n+\frac{1}{n^2}) = 1$ y $\forall n \geq 2$ $f(n) = 0$.

Por tanto, $\lim_{x\to\infty} f(x)$ no existe.

(ya que $n+\frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ y $n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$).

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \iff \forall (x_n) \subseteq \mathrm{Dom}(f) \left(x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} L \right)$$