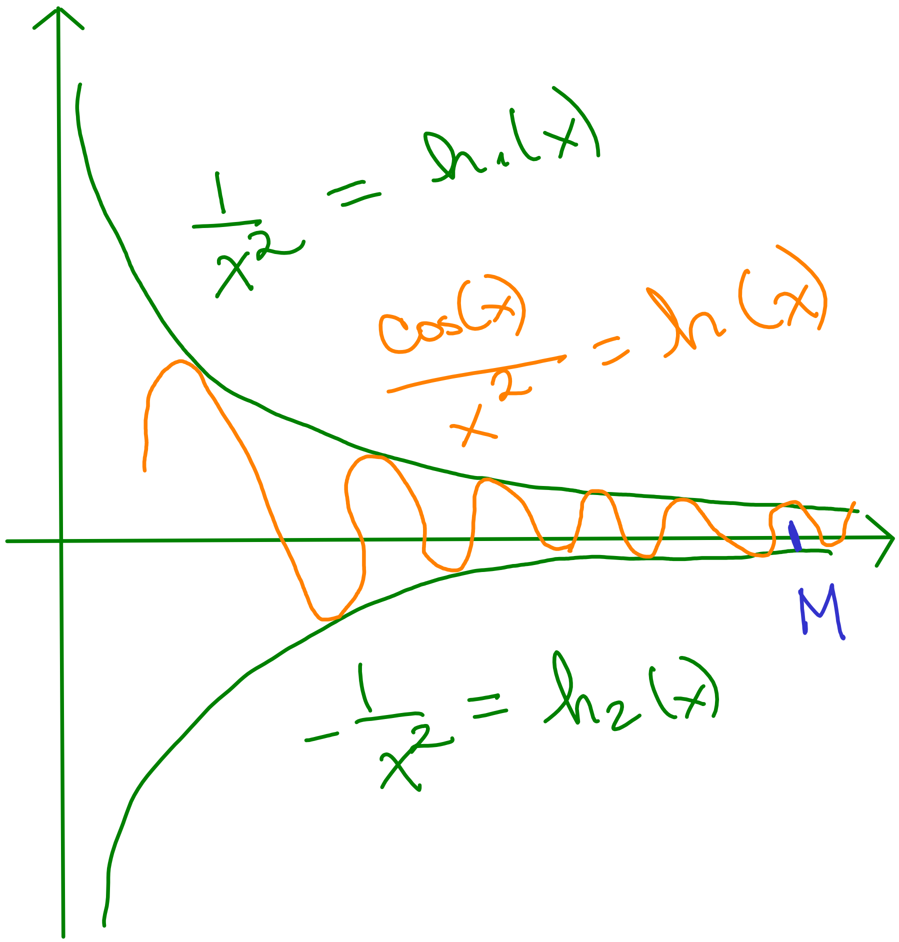


De la Tarea 6

Ej.
Ver que

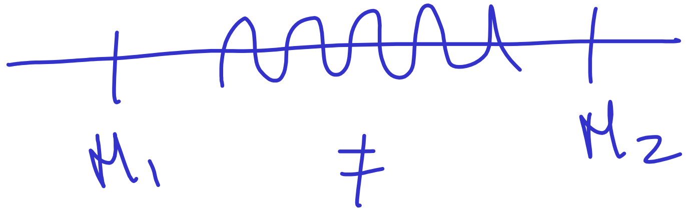
$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\, dx \text{ existe.}$$

Nos faltó demostrar que

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\, dx \text{ existe.}$$

Por integración por partes, ver que este límite existe es equivalente a que

$$\exists \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{\cos(x)}{x^2}\, dx.$$



$$f(b)=\int_1^b \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx.$$

P. Veremos que $\lim\limits_{b\to\infty}\int_1^b \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx$ existe usando sucesiones de Cauchy.

Recordar: ① $(x_n)\subseteq\mathbb{R}$ es de Cauchy si

$\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n>m\geq N\ \ |x_n-x_m|<\varepsilon$

② $(x_n)\subseteq\mathbb{R}$ es de Cauchy $\Longleftrightarrow$ x_n converge en $\mathbb{R}$.

Para nuestro problema P procedemos como sigue:

(I) Encontraremos un candidato L a ser $\lim\limits_{b\to\infty}\int_1^b \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx$

Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números real arbitraria pero fija y t.q. $x_n \longrightarrow \infty$.

Entonces para $n, m \in \mathbb{N}$, se tiene que:

$$\left| \int_1^{x_n} \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx - \int_1^{x_m} \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx \right| =$$

$$\left| \int_1^{x_n} \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx + \int_{x_m}^{1} \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx \right| =$$

$$\left| \int_{x_m}^{x_n} \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx \right| \leq \int_{x_m}^{x_n} \frac{|\cos(x)|}{x^2}\,dx$$

suponiendo $x_n > x_m$.

$$\leq \int_{x_m}^{x_n} \frac{1}{x^2}\,dx.$$

$$= \int_1^{x_n} \frac{1}{x^2}\,dx - \int_1^{x_m} \frac{1}{x^2}\,dx$$

Como $\displaystyle \lim_{b\to\infty} \underbrace{\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx}_{g(b)} = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right) = 1,$

$\displaystyle I_n := \int_1^{x_n} \frac{1}{x^2}\,dx$ es una sucesión convergente y, por lo tanto, es una sucesión de Cauchy.

Prop. Si g es una función, ent.

$$\lim_{b\to\infty} g(b) = L \iff \forall (x_n), \text{ si } x_n \longrightarrow \infty, \text{ ent } g(x_n) \longrightarrow L$$

Ent: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n > m > N$

$$\left| \int_{x_m}^{x_n} \frac{1}{x^2}\,dx \right| = \left| \int_1^{x_n} \frac{1}{x^2}\,dx - \int_1^{x_m} \frac{1}{x^2}\,dx \right| < \varepsilon$$

Spg sup que $x_n > x_m$.

Ent $\int_{x_m}^{x_n} \frac{1}{x^2}\,dx < \varepsilon$.

Juntando esto con $(*)$ se tiene entonces

que $\left(\int_1^{x_n} \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx \right)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy

Por tanto, $\left(\int_1^{x_n} \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx\right)$ converge en $\mathbb{R}$.

(II) Mostraremos que $\lim\limits_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int_1^{x_n} \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx$

$=: L$.

Sea (y_n) cualquier sucesión t.q. $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

P.D. $\int_1^{y_n} \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx \longrightarrow L$

Veamos que, para (x_n) como en el paso I, se tiene que:

$$0 \le \left| \int_1^{y_n} \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx - \int_1^{x_n} \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx \right| =$$

$$\left| \int_{x_n}^{y_n} \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx \right| \le \begin{cases} \displaystyle\int_{x_n}^{y_n} \frac{|\cos(x)|}{x^2}\,dx & \text{si } x_n \le y_n \\ \displaystyle\int_{y_n}^{x_n} \frac{|\cos(x)|}{x^2}\,dx & \text{si } y_n \le x_n \end{cases}$$

$$\le \begin{cases} \displaystyle\int_{x_n}^{y_n} \frac{1}{x^2}\,dx & \text{si } x_n \le y_n \\ \displaystyle\int_{y_n}^{x_n} \frac{1}{x^2}\,dx & \text{si } y_n \le x_n \end{cases}$$

Como $\displaystyle\int_1^{y_n} \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx = \int_1^{y_n} \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx - \int_1^{x_n} \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx$

$$+ \int_1^{x_n} \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx$$

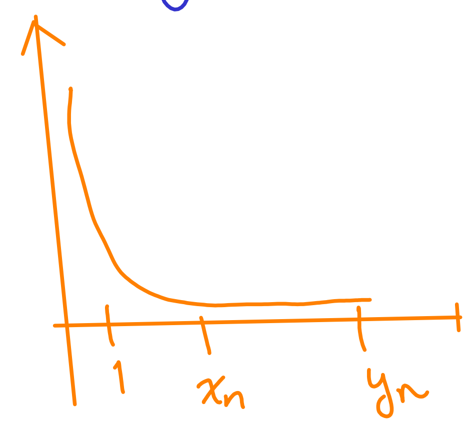
$$\longrightarrow 0 + L.$$

Ent $\displaystyle\int_1^{y_n} \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} L \quad \forall (y_n)$ t.q.

$$y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx = L.$$

$$\leq \begin{cases} \displaystyle\int_1^{y_n} \frac{1}{x^2}\,dx - \int_1^{x_n} \frac{1}{x^2}\,dx & \text{si } x_n \leq y_n \\[2ex] \displaystyle\int_1^{x_n} \frac{1}{x^2}\,dx - \int_1^{y_n} \frac{1}{x^2}\,dx & \text{si } y_n \leq x_n \end{cases}$$



$$= \left| \int_1^{x_n} \frac{1}{x^2}\,dx - \int_1^{y_n} \frac{1}{x^2}\,dx \right|.$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{pues } \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx.$$

Si $h_1, h, h_2 : [a,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ son t.q.

$$h_2(x) \leq h(x) \leq h_1(x) \quad \forall x \in (a,\infty) \text{ y}$$

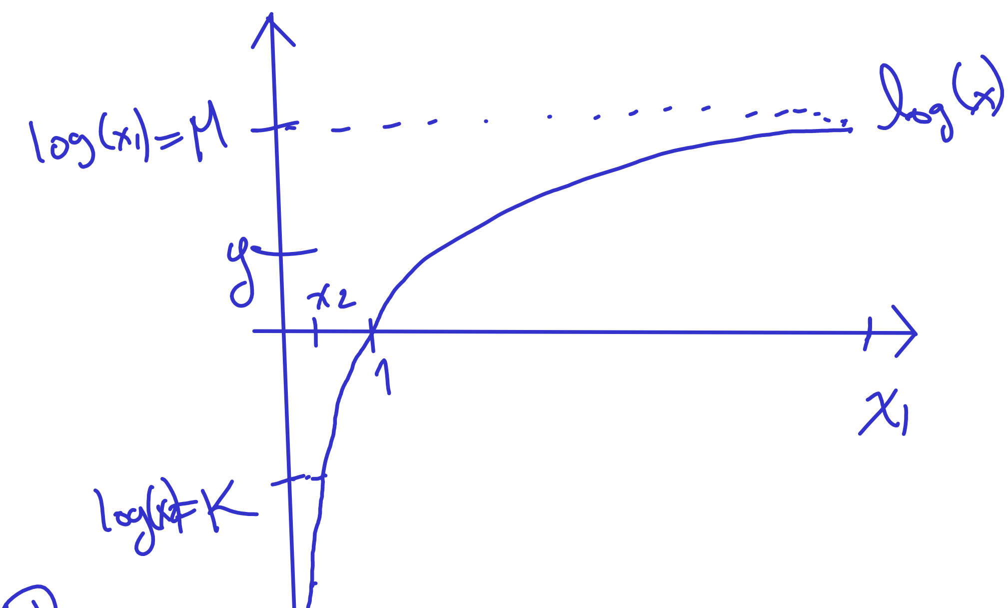
si $\int_a^\infty h_1(x)\,dx$ existe & $\int_a^\infty h_2(x)\,dx$ existe,

ent $\int_a^\infty h(x)\,dx$ existe. //

Funciones logaritmo y exponencial.

<u>Def:</u> $\log(x) := \int_1^x \frac{1}{y}\,dy. \quad \forall x>0$

Se tiene ent. que $\log(x)$ es una función creciente (en el sentido estricto).



- $\lim\limits_{x\to\infty} \log(x) = \infty.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \log(x) = -\infty$
- Por TVI, $\mathrm{Im}(\log) = \mathbb{R}.$

Por T.F.C y por def, $\frac{d}{dx}\log(x_0) = \frac{1}{x_0}$.

· Necesariamente, $\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y) \quad \forall x, y > 0$.

Como $\log : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ es biyectiva, existe su inversa y la llamamos $\exp = (\log)^{-1}$.

<u>Proposición:</u> La función $e^x := \exp(x) := (\log)^{-1}(x)$ es derivable y $\frac{d}{dx} e^x = e^x$.

<u>Dem:</u> $\frac{d}{dx} e^x = \frac{d}{dx}(\log^{-1})(x) \underset{\text{Teo. func. inv.}}{=}$

$$\boxed{\frac{1}{\frac{1}{y}} = y.}$$

$$\frac{1}{\left(\frac{d}{dx}\log\right)\left(\log^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{\frac{1}{\log^{-1}(x)}} = \log^{-1}(x)$$

$$=: \exp(x) = e^x.$$

$\square$

<u>Proposición:</u> $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $\quad e^{x+y} = e^x \cdot e^y.$

<u>Dem:</u> Sean $x, y \in \mathbb{R}$ arbitrarios.

Llamamos $x' := e^x$ y $y' := e^y$.

Ent: $x', y' > 0$ pues $\mathrm{Im}(\exp) = \mathrm{Dom}(\log) = (0, \infty)$.

Además $\log(x') = x$ y $\log(y') = y$.

Ent.

$$x+y = \log(x') + \log(y') = \log(x' \cdot y')$$

Ent

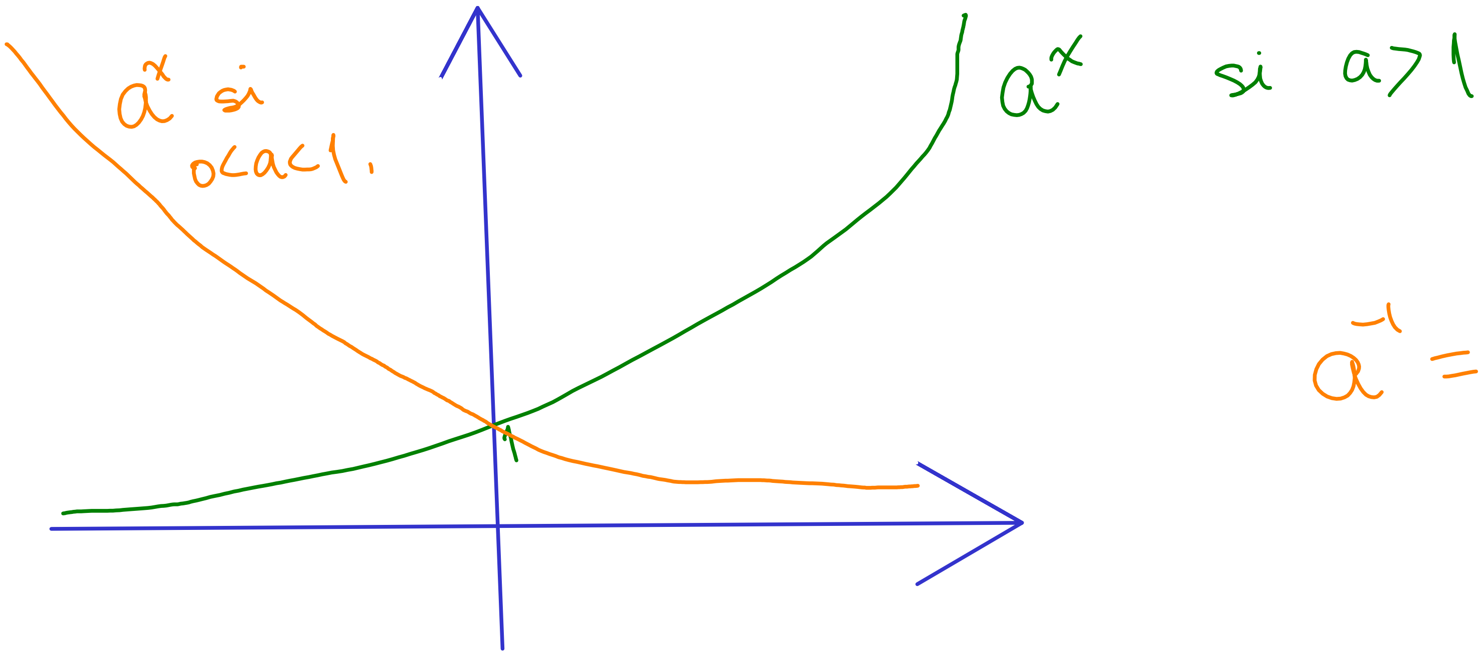
$$e^{x+y} = \exp(x+y) = \exp(\log(x' \cdot y')) = x' \cdot y'$$

$$= e^x \cdot e^y.$$

$\square$

<u>Definición:</u> Si $a>0$, definimos

$$a^x := e^{x\log(a)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



$a^{-1} = \frac{1}{a}$.

<u>Definición:</u> Definimos e como el número real $e := \exp(1) = (\log^{-1})(1)$, es decir,

e es el número t.q. $\log(e) = 1$, i.e:

es el número t.q. $\boxed{1 = \int_1^e \frac{1}{y}\,dy.}$

Con las herramientas de Taylor se puede probar que

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \exp(1).$$

$\square$