Examen Parcial 1.

1. $f(x) = -3x^3 + 9x^2 - 6x$

Determina:

(i) En dónde es f creciente o decreciente:

Calculamos $f'(x) = -9x^2 + 18x - 6$

$$= -9\left(x^2 - 2x + \frac{6}{9}\right)$$

$$= -9\left(x^2 - 2x + 1 - 1 + \frac{2}{3}\right)$$

$$= -9\left((x-1)^2 - \frac{1}{3}\right)$$

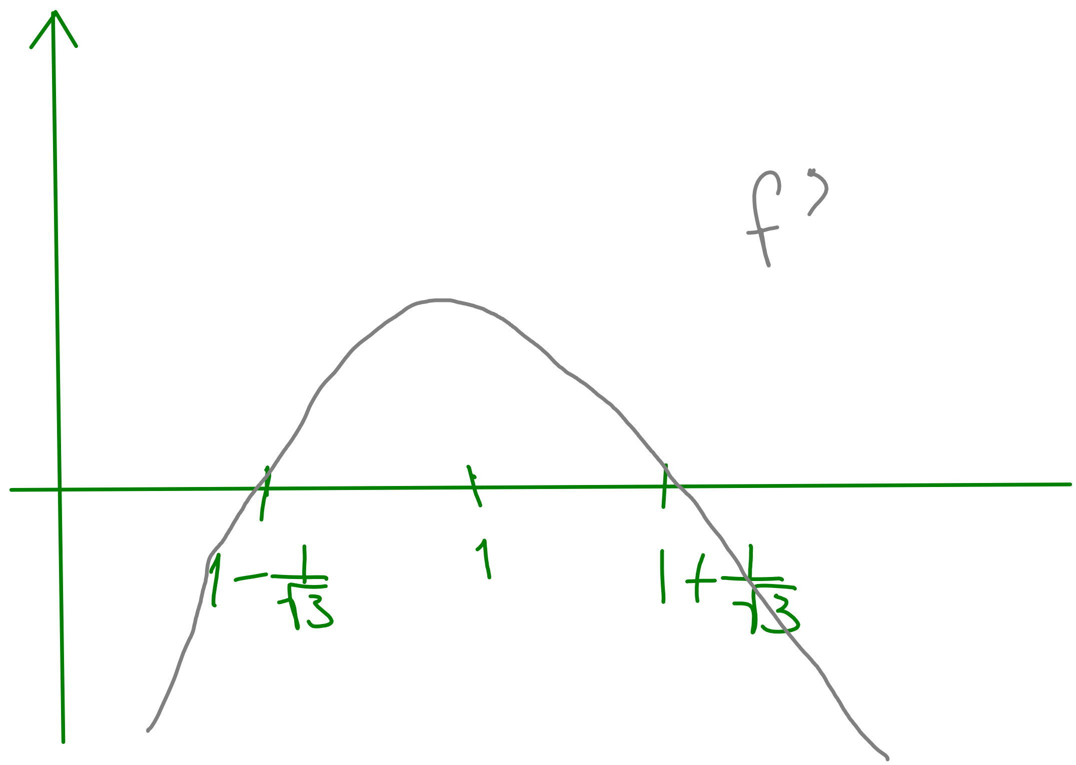
Notemos que $f'(x) = 0 \iff (x-1)^2 - \frac{1}{3} = 0$

$$\iff (x-1)^2 = \frac{1}{3}$$

$$\iff |x-1| = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\iff x-1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{ó} \quad 1-x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\iff \boxed{x = 1+\frac{1}{\sqrt{3}}} \quad \text{ó} \quad \boxed{1-\frac{1}{\sqrt{3}} = x}.$$



Como $f'(x)=0 \iff x = 1-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ó $x = 1+\frac{1}{\sqrt{3}}$,

entonces por continuidad y por T.V.I

aplicado a f' se tiene que el signo

de f' debe ser el mismo en los intervalos

(Justificar bien por qué si hubiera cambios de signo en f' dentro de los intervalos mencionados, ent. f' se anularía en puntos distintos a $1-\frac{1}{\sqrt{3}}$ y $1+\frac{1}{\sqrt{3}}$).

(i) $\left(-\infty, 1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

(ii) $\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ y

(iii) $\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$.

Como: (i) $0 \in \left(-\infty, 1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ y

$$f'(0) = -9\left((0-1)^2 - \frac{1}{3}\right)$$

$$= -9\left(1-\frac{1}{3}\right)$$

$$= -\frac{18}{3} = -6 < 0$$

$\therefore f'(x) < 0 \quad \forall x \in \left(-\infty, 1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

$\boxed{\text{Entonces, } f \text{ es decreciente en } \left(-\infty, 1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$.

(ii) $1 \in \left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ y

$$f'(1) = -9\left((1-1)^2 - \frac{1}{3}\right) = \frac{-9}{-3} = 3$$

$\therefore\ f'(1) > 0$ y, ent,

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

$\therefore$ $\boxed{f \text{ es creciente en } \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right).}$

(iii) $2 \in \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$ y

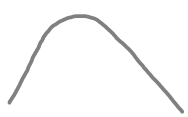
$$f'(2) = -9\left((2-1)^2 - \frac{1}{3}\right)$$

$$= -9\left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

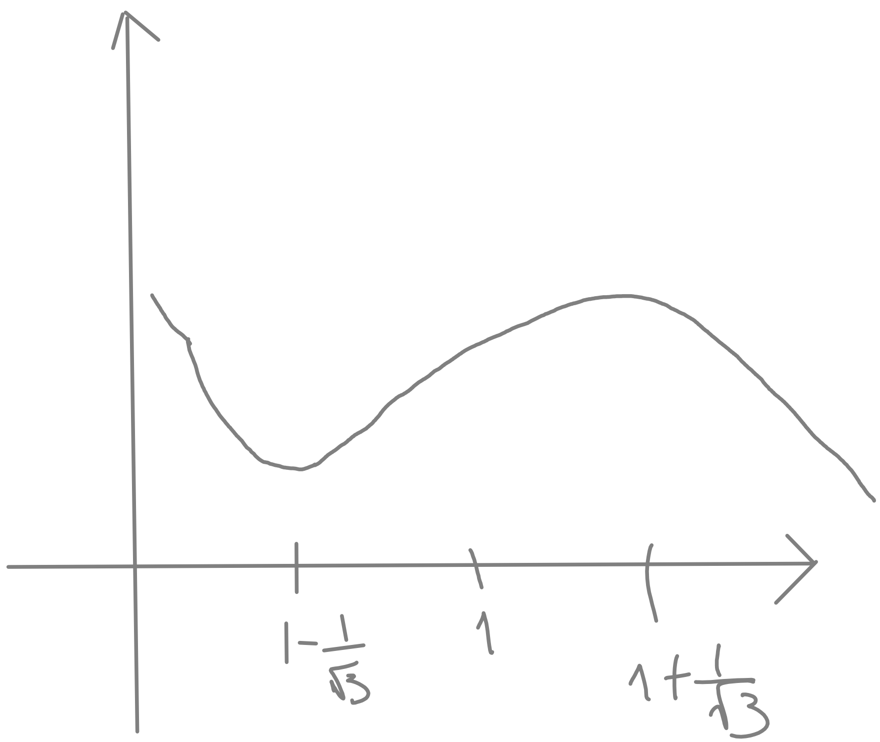
$$= -9\left(\frac{2}{3}\right) = -6 < 0$$

$\therefore\ f'(x) < 0 \quad \forall x \in \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$ y

f es decreciente en $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$.



Si f crece en (a, x_0) y decrece en (x_0, b) $\Longrightarrow$ f tiene un máx. en x_0



(ii) $x_0 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$ y $x_1 = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$

son los dos puntos críticos

Los intervalos de monotonía implican que

x_0 es un minimiz. local

y x_1 es un maximiz. local.

(iii) Regiones de convexidad y concavidad:

$$f''(x) = -18x + 18.$$

Notemos que $f''(x) > 0 \iff -18x + 18 > 0$

$\Longleftrightarrow \quad 18 > 18x \quad \Longleftrightarrow \quad 1 > x$

De igual forma $f''(x) < 0 \Longleftrightarrow 1 < x$.

y $\quad f''(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1$.

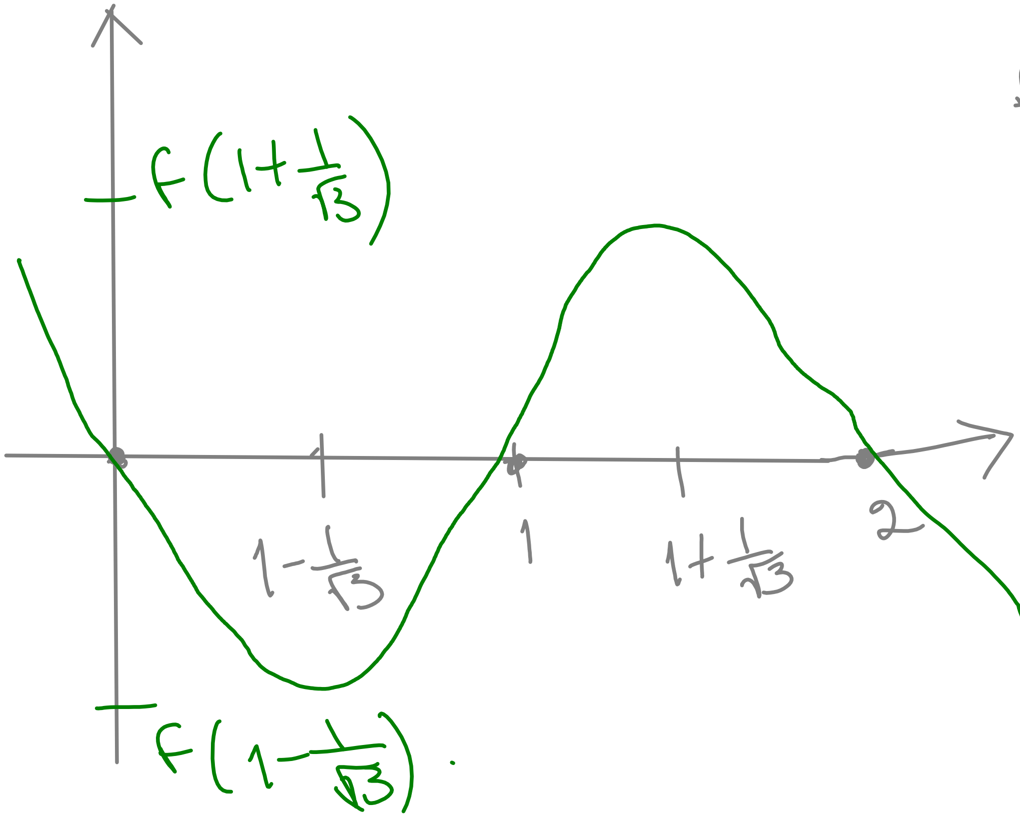
Por tanto, f es convexa en $(-\infty, 1)$,

f es cóncava en $(1, \infty)$ y

(iv) en $x = 1$ f tiene un punto de inflexión.

(Si x_0 es pto. de inf $\Rightarrow f''(x_0) = 0$)

$\not\Leftarrow$



$$f(x) = -3x^3 + 9x^2 - 6x$$

$$= -3x\left(x^2 - 3x + 2\right)$$

Ent $f(0) = 0$ y si $x \neq 0$, ent.

$$f(x) = 0 \iff x^2 - 3x + 2 = 0.$$

$$\iff x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$= \frac{3 \pm 1}{2}$$

$\therefore\ f(x)=0 \iff x=0$ ó $x=\frac{3+1}{2}=2$ ó

$$x=\frac{3-1}{2}=1.$$

2. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ acotada y t.q. $\forall c\in(a,b)$ $f\restriction_{[c,b]}$ es integrable.

Mostrar que f es integrable en $[a,b]$ y

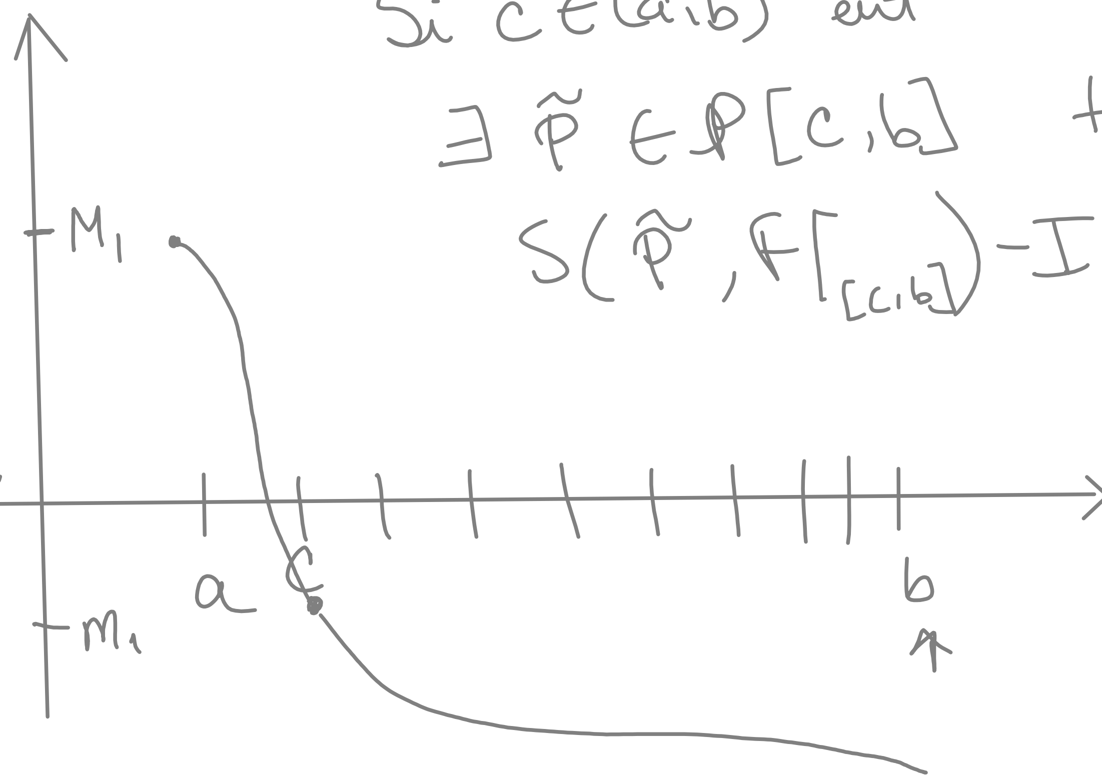
$$\int_a^b f\,dx = \lim_{c\to a}\int_c^b f\,dx.$$

<u>Idea</u>:

Sea $\varepsilon>0$

P.D: $\exists\, P\in\mathcal{P}[a,b]$

$S(P,f)-I(P,f)<\varepsilon$



Si $c\in(a,b)$ ent

$\exists\,\tilde{P}\in\mathcal{P}[c,b]$ t.q.

$$S(\tilde{P},f\restriction_{[c,b]})-I(\tilde{P},f\restriction_{[c,b]})<\frac{\varepsilon}{2}$$

Queremos que el punto c sea tal que si $M_1 = \sup\{f(x) : x \in [a,c]\}$ y $m_1 = \inf\{f(x) : x \in [a,c]\}$, ent:

$$(M_1 - m_1)(c-a) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sean $M := \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$

y $m = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$.

Nótese que $(M_1 - m_1) \leq M - m$.

Por tanto: $(M_1 - m_1)(c-a) < (M-m)(c-a)$

$$< \frac{\varepsilon}{2}$$

¿quién es?

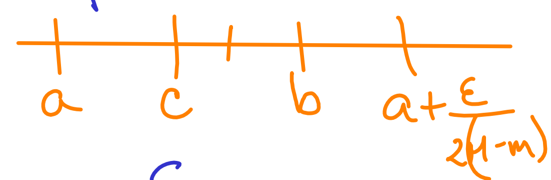
c tiene que ser t.q. $c - a < \dfrac{\varepsilon}{2(M-m)}$

i.e. $c < a + \dfrac{\varepsilon}{2(M-m)}$.

En limpio:

Sea $\varepsilon > 0$.

Demostraremos que $\exists P \in \mathcal{P}[a,b]$ t.q.



$$0 \leq S(P,f) - I(P,f) < \varepsilon.$$

Elegimos $c \in (a,b)$ t.q. $c < a + \dfrac{\varepsilon}{2(M-m)}$

donde $M := \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$
$m := \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$,

que existen pues f es acotada en $[a,b]$.

Por hipótesis $f|_{[c,b]}$ es integrable, ent. por Criterio de Riemann, $\exists\, \tilde{P} \in \mathcal{P}[c,b]$ t.q.

$$0 \leq S(\tilde{P}, f|_{[c,b]}) - I(\tilde{P}, f|_{[c,b]}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si $\tilde{P} = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ con $x_0 = c$, $x_n = b$ y $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, definimos

$$P := \{a, x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

Nótese que $P \in \mathcal{P}[a,b]$.

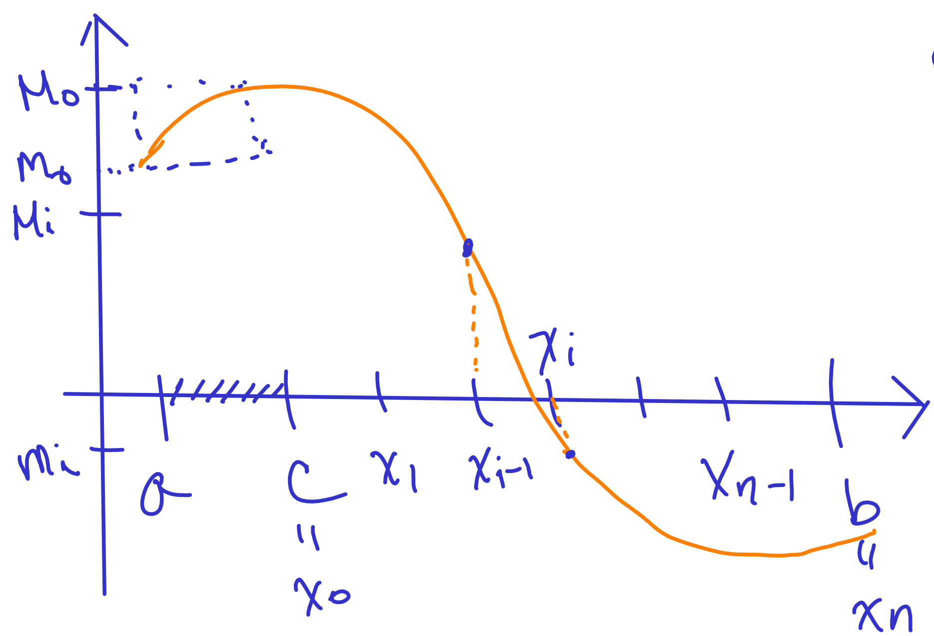
Notemos que, si $M_0 := \sup\{f(x) : x \in [a, x_0]\}$

$m_0 := \inf\{f(x) : x \in [a, x_0]\}$

y si $M_i := \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

para $1 \leq i \leq n$, entonces



$$S(f, P) - I(f, P) =$$

$$(M_0 - m_0)(c - a) +$$

$$\sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$\leq (M-m)(c-a) + S(\tilde{P}, f\restriction) - I(\tilde{P}, f\restriction)$$

$$\underset{\substack{\text{elección de} \\ c \text{ y} \\ \text{de } \tilde{P}}}{<} (M-m)\left(\cancel{a} + \frac{\varepsilon}{2(M-m)} - \cancel{a}\right) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto muestra que f es integrable en $[a,b]$.

P.D. $\displaystyle\lim_{c \to a} \int_c^b f = \int_a^b f$.

$$\boxed{\text{P.D. } \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \left(0 < c - a < \delta \Rightarrow \left| \int_a^b f - \int_c^b f \right| < \varepsilon \right)}$$

<u>Nota.</u> $|c-a| = c-a$ pues $c \in (a,b)$

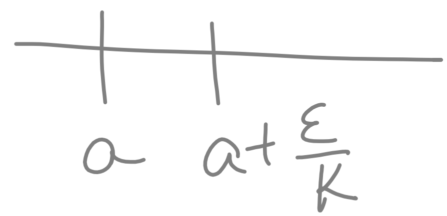
<u>Trabajo informal:</u>

$$\left| \int_a^b f - \int_c^b f \right| = \left| \int_a^c f \right| \leq \int_a^c |f|$$

$$\leq \int_a^c K \, dx = \boxed{K(c-a) < \varepsilon}.$$

$K = \sup |f|$ ¡Queremos esto!

<u>Necesitamos</u> $c < \frac{\varepsilon}{K} + a$.



Queremos que $\boxed{\delta := \frac{\varepsilon}{K}}$.

En limpio:

Sea $\varepsilon > 0$.

Definamos $K := \sup\{ |f(x)| : x \in [a,b] \}$,

que existe pues f es acotada.

Sea $\delta := \dfrac{\varepsilon}{K}$

Sea $c \in (a,b)$ t.q. $0 < c-a < \delta = \dfrac{\varepsilon}{K}$.

Entonces:

$$\left| \int_a^b f - \int_c^b f \right| = \left| \int_a^c f \right| \leq \int_a^c |f| \leq \int_a^c K = K\cdot(c-a)$$

Des. del Δ p. int . integral es monótona.

$$< K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon.$$

$$\therefore \lim_{c \to a} \int_c^b f = \int_a^b f.$$

$\square$