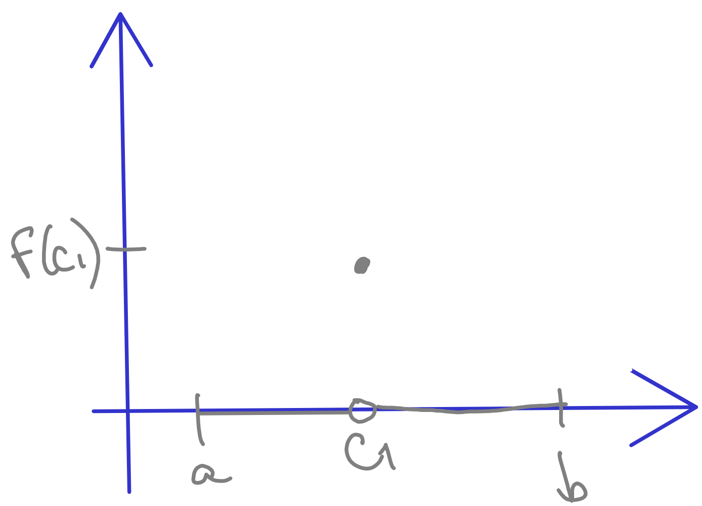
De Tarea 2.

Ejercicio 4.

Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ t.q. $f(x)=0$ $\forall x\in[a,b]-\{c_1,\dots,c_n\}$

con $\{c_1,\dots,c_n\}\subseteq[a,b]$ un conjunto finito.

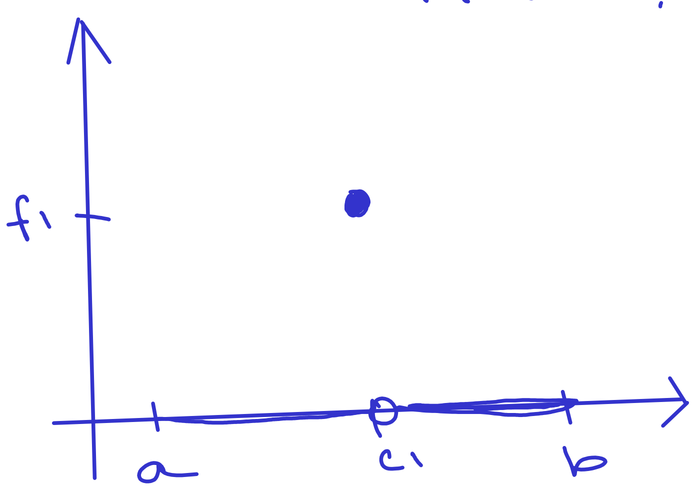
Entonces f es int. en $[a,b]$ y $\int_a^b f=0$.



El primer paso es probar que si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\in[a,b] \text{ y } x\neq c_1 \\ f_1 & \text{si } x=c_1 \end{cases}$$

con $f_1\neq 0$.



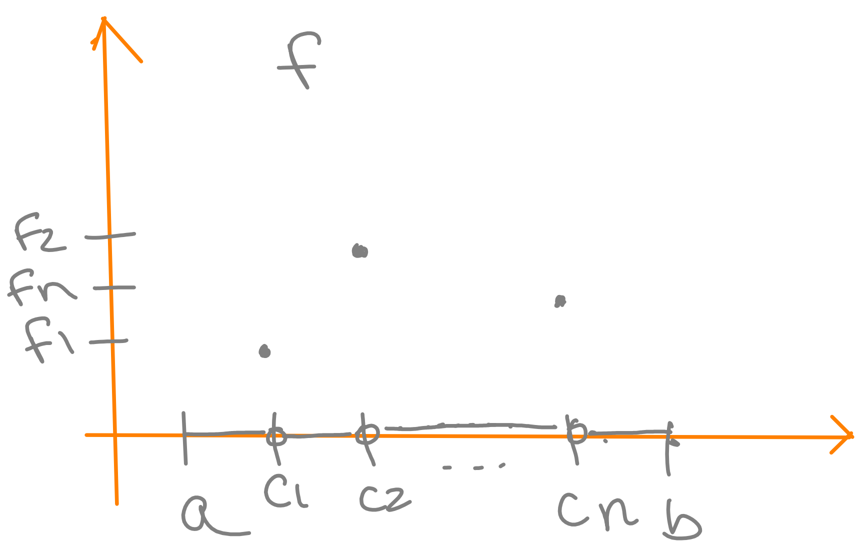
El caso general es aquel en el que $\exists\, c_1,c_2,\dots,c_n\in[a,b]$ y $\exists\, f_1,f_2,\dots,f_n\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ tales que

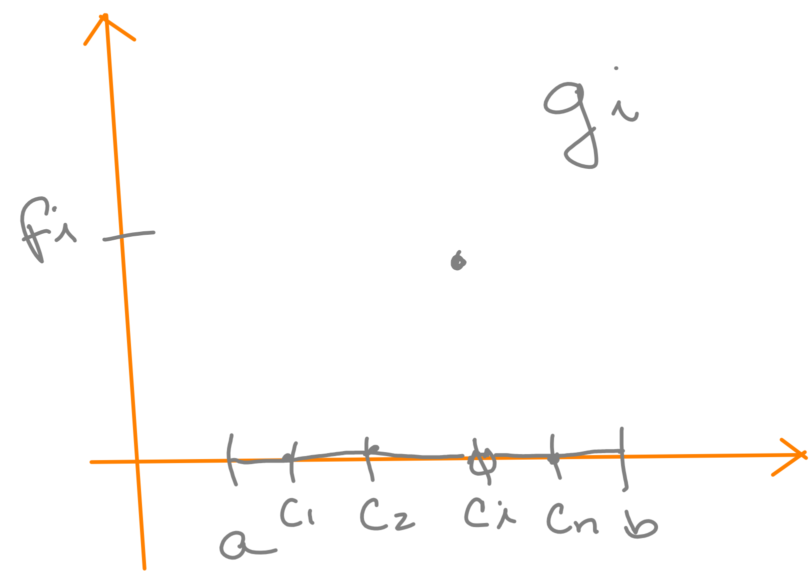
$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\in[a,b]-\{c_1,\dots,c_n\}. \\ f_i & \text{si } x=c_i \text{ con } 1\le i\le n \end{cases}$$

Llamemos

$g_i:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ a la función

$$g_i(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\in[a,b]-\{c_i\} \\ f_i & \text{si } x=c_i \end{cases}$$



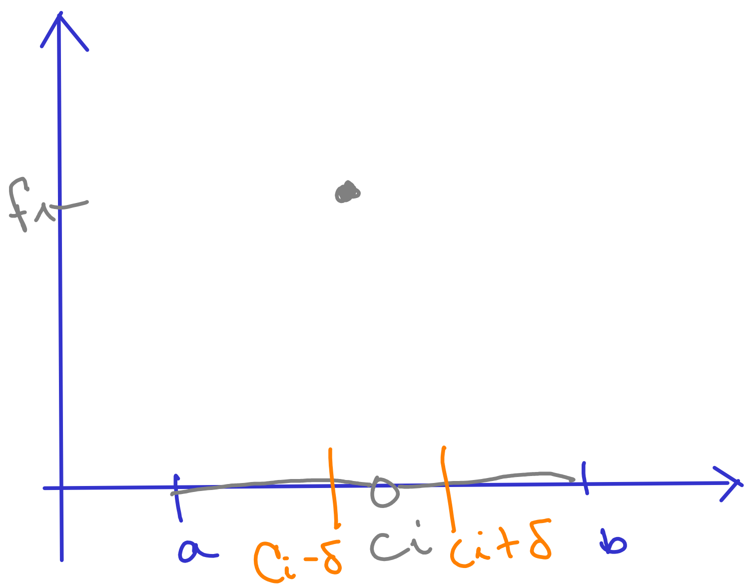


Entonces $f = g_1 + g_2 + \dots + g_n$.

Como suma de funciones int. es int y la integral "abre sumas", ent.

$$\int_a^b f = \int_a^b g_1 + \int_a^b g_2 + \dots + \int_a^b g_n = 0 + \dots + 0 = 0.$$

Resta ver que cada g_i es int. y que $\int_a^b g_i = 0$.



Sup. s.p.g. que $g_i(c_i) = f_i > 0$.

Si $f_i < 0$, la función $-g_i$ cumpliría que $-g_i(c_i) > 0$, de modo que si $\int_a^b (-g_i) = 0$, ent. tendríamos que $\int_a^b g_i = 0$.

Por el criterio de Riemann, dado $\varepsilon > 0$ y

buscamos $P \in \mathcal{P}[a,b]$ t.q.

$$0 \leq S(P, g_i) - I(P, g_i) < \varepsilon$$

Trabajo en sucio:

Buscamos $\delta > 0$ t.q. si $P = \{a, c_i - \delta, c_i + \delta, b\}$

ent. $S(P, g_i) - I(P, g_i) < \varepsilon$.

Si $M_1 := \sup\{g_i(x) : x \in [a, c_i - \delta]\} = 0$

$m_1 = \inf\{g_i(x) : x \in [a, c_i - \delta]\} = 0$

$M_2 = \sup\{g_i(x) : x \in [c_i - \delta, c_i + \delta]\} = f_i$

$m_2 = \inf\{g_i(x) : x \in [c_i - \delta, c_i + \delta]\} = 0$

$$M_3 = \sup\{g_i(x) : x \in [c_i+\delta, b]\} = 0$$
$$m_3 = \inf\{g_i(x) : x \in [c_i+\delta, b]\} = 0$$

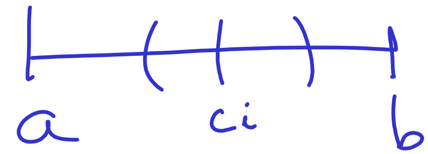
Entonces:

$$S(P,f) - I(P,f) = \overbrace{\cancel{(M_1 - m_1)}}^{0} \cdot (c_i - \delta - a)$$
$$+ (M_2 - m_2) \cdot 2\delta$$
$$+ \overbrace{\cancel{(M_3 - m_3)}}^{0} (b - (c_i + \delta))$$
$$= f_i \cdot 2\delta$$
$$< \varepsilon \quad \underline{\underline{\text{si}}} \quad \delta < \frac{\varepsilon}{2f_i}$$

Ahora en limpio:

Sea $\delta > 0$ tal que $\delta < \dfrac{\varepsilon}{2f_i}$ y $a < c_i - \delta < c_i + \delta < b$.

Sea $P = \{a, c_i - \delta, c_i + \delta, b\}$.



Si

$$M_1 := \sup\{g_i(x) : x \in [a, c_i - \delta]\} = 0$$
$$m_1 = \inf\{g_i(x) : x \in [a, c_i - \delta]\} = 0$$
$$M_2 = \sup\{g_i(x) : x \in [c_i - \delta, c_i + \delta]\} = f_i$$
$$m_2 = \inf\{g_i(x) : x \in [c_i - \delta, c_i + \delta]\} = 0$$
$$M_3 = \sup\{g_i(x) : x \in [c_i + \delta, b]\} = 0$$
$$m_3 = \inf\{g_i(x) : x \in [c_i + \delta, b]\} = 0$$

Entonces:

$$S(P,f) - I(P,f) = \cancel{(M_1 - m_1)}^{0} \cdot (c_i - \delta - a)$$

$$+ (M_2 - m_2) \cdot 2\delta$$

$$+ \cancel{(M_3 - m_3)}^{0} (b - (c_i + \delta))$$

$$= f_i \cdot 2\delta$$

$$< \varepsilon \quad \text{pues } \delta < \frac{\varepsilon}{2f_i}$$

$$\text{y } f_i > 0.$$

$\therefore$ g_i es integrable en $[a,b]$.

Veamos que $\int_a^b g_i = 0$:

Sea $\varepsilon > 0$ arbitraria.

Como $g_i \geq 0$, entonces, tomando P como arriba:

$$0 \leq \int_a^b g_i \leq S(P, g_i)$$

$$< \varepsilon + I(P, g_i)$$

$$= \varepsilon \quad \text{pues } I(P, g_i) = 0.$$

$\therefore$ Tomando lím cuando $\varepsilon \to 0$, concluimos

que $\int_a^b g_i = 0$. $\square$

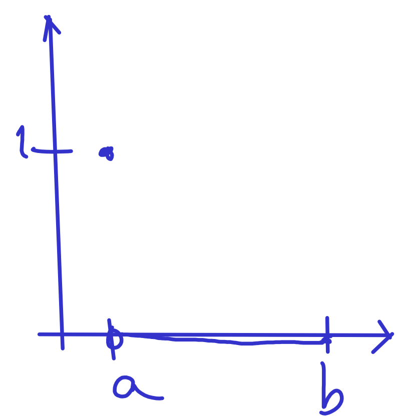
Del Examen P.I.

P.3.

(i) Dar ejemplo de $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ t.q. $f(x)\geq 0$ $\forall x\in[a,b]$, $f(x_0)>0$ p.a. $x_0\in[a,b]$ y $\int_a^b f=0$.

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ definida como

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x=a\\ 0 & \text{si } x\in(a,b].\end{cases}$$



Ent., por ej. 4 de Tarea 2, f es int. en $[a,b]$ y $\int_a^b f=0$.

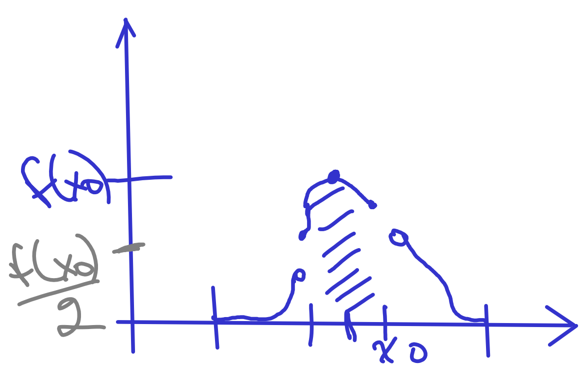
Otra forma de justificarlo es:

$\forall c \in (a,b)$, f es continua y es igual a la constante 0 en $[c,b]$.

Ent, como f es acotada, f es int. en $[a,b]$ y $\int_a^b f = \lim_{c \to a} \int_c^b f = 0$

(ii) Sup. que f es continua en $x_0 \in [a,b]$, $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$ y $f(x_0) > 0$

Mostrar que $\int_a^b f > 0$.



Lema: Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es continua en $x_0\in(a,b)$ y $f(x_0)\neq 0$, ent. $\exists\ \delta>0$ t.q. $\forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ $|f(x)|\geq \frac{|f(x_0)|}{2}$.

Dem. del ej. Como $f\geq 0$ y $f(x_0)>0$, ent., por el Lema, existe $\delta>0$

$$\forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)\quad f(x)\geq\frac{f(x_0)}{2}.$$

Nótese que, entonces

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\frac{f(x_0)}{2}\,dx = \frac{f(x_0)}{2}2\delta$$

$$= f(x_0)\cdot\delta > 0.$$

Luego, como $f(x)\geq 0$ $\forall x\in[a,b]$, ent.

$$\int_a^{x_0-\delta} f(x)\,dx \geq 0 \quad \text{y} \quad \int_{x_0+\delta}^{b} f(x)\,dx \geq 0.$$

Por tanto usando la prop $\star$ de la integral, se tiene que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_0-\delta} f + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f + \int_{x_0+\delta}^{b} f.$$

$$> 0 + f(x_0)\cdot\delta + 0$$

$$= f(x_0)\cdot\delta > 0$$

$\square$

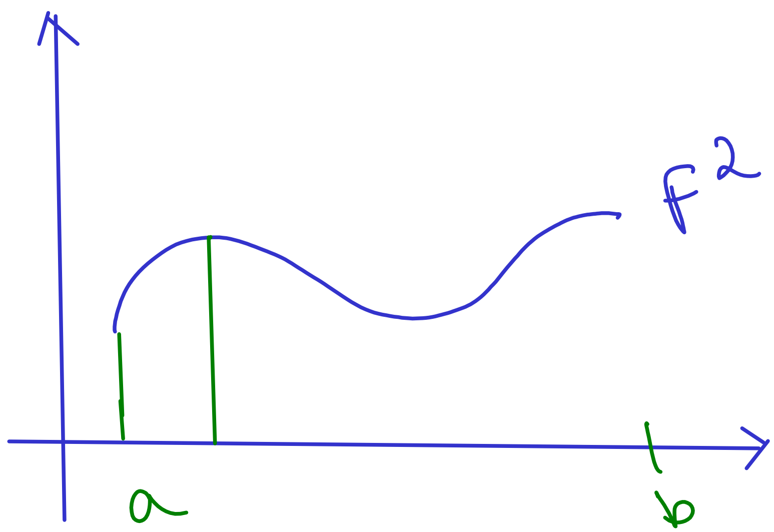
Prop. ★ de la integral:

Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es int. en $[a,b]$ y $c\in(a,b)$, ent f es int. en $[a,c]$ y en $[c,b]$ y

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

4 (i). Muestra que si f es int. en $[a,b]$ y si $0 \leq m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a,b]$, ent.

$$m \leq \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f^2(x) \right)^{\frac{1}{2}} \leq M.$$



Dems:

P.D. $m^2 \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f^2 \leq M^2$.

Como $\forall x \in [a,b] \quad 0 \leq m \leq f(x) \leq M$, ent,

$\forall x \in [a,b] \quad 0 \leq m^2 \leq f^2(x) \leq M^2$.

(estamos usando que todos los términos son ≥ 0).

Ent: $\int_a^b m^2\,dx \leq \int_a^b f^2(x)\,dx \leq \int_a^b M^2\,dx$

Ent: $m^2\cdot(b-a) \leq \int_a^b f^2\,dx \leq M^2(b-a)$

Por tanto, $m^2 \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f^2 \leq M^2.$

y sacando raíz: $m \leq \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq M.$

$\square$