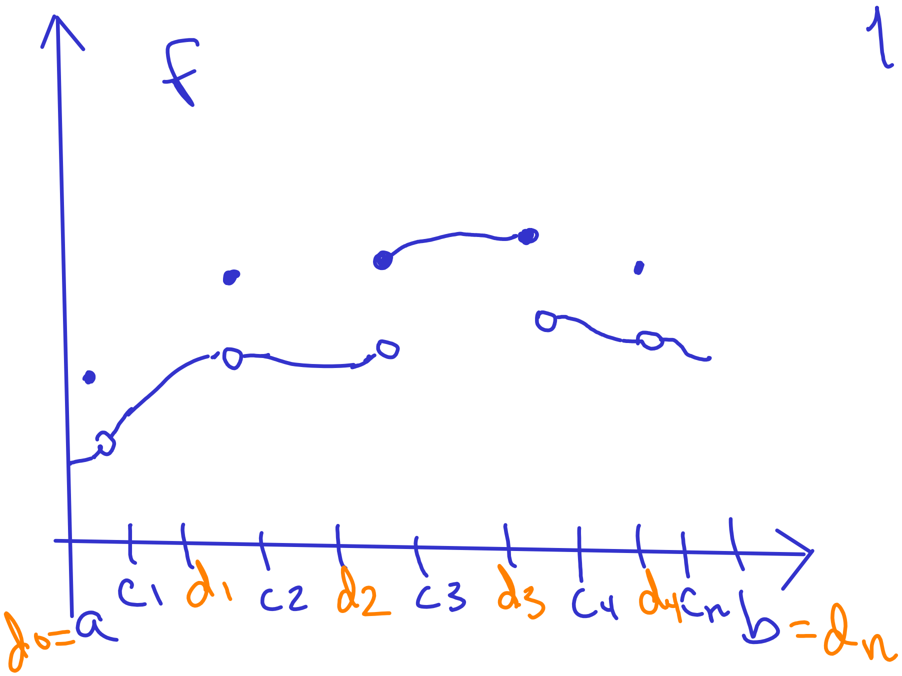
4. Si $f=0$ en $[a,b]-\{c_1,\dots,c_n\}$, ent f es int y $\int_a^b f = 0$.

Lo probamos expresando $f = g_1+\dots+g_n$ donde cada $g_i=0$ en $[a,b]-\{c_i\}$ y mostrando el resultado para cada g_i.



10. Si $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ es continua en $[a,b]$ salvo por un conjunto finito de puntos $\{c_1,\dots,c_n\}$, y f es acotada, ent f es integrable.

Proposición: Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es acotada

Ent. f es int. en $[a,b]$ $\Longleftrightarrow$ para cualesquiera puntos $d_1<d_2<\dots<d_n$ con $d_1,\dots,d_n\in[a,b]$, f

f es int. en $[a,d_1]$, $[d_1,d_2]$, $\dots$, $[d_{n-1},d_n]$, $[d_n,b]$.

En este caso
$$\int_a^b f = \int_a^{d_1} f + \int_{d_1}^{d_2} f \dots + \int_{d_{n-1}}^{d_n} f + \int_{d_n}^{b} f$$

Dem: Por inducción sobre n:

Base: Para $n=1$, el enunciado es.

f es int en $[a,b]$ $\Longleftrightarrow$ $\forall d_1\in[a,b]$, f es int en $[a,d_1]$ y en $[d_1,b]$.

Esto lo probamos en el Aula Magna P en algún momento.

<u>H.I.</u> Si $d_1, \dots, d_n \in [a,b]$ son t.q. $d_1 < d_2 < \dots < d_n$, ent f es int en $[a,b] \iff f$ es int. en $[a,d_1], [d_1,d_2], \dots, [d_{n-1}, d_n], [d_n, b]$.

P.D. Si $d_1, \dots, d_n, d_{n+1} \in [a,b]$ son t.q. $d_1 < d_2 < \dots < d_n < d_{n+1}$, ent

f es int. en $[a,b] \iff f$ es int. en $[a,d_1], [d_1,d_2], \dots, [d_n, d_{n+1}], [d_{n+1}, b]$.

Nótese que $d_1 < d_2 < \dots < d_n$ y ent., por H.I.,

f es int en $[a,b] \iff f$ es int.

en $[a,d_1], [d_1,d_2], \dots, [d_{n-1},d_n], [d_n,b]$.

Nótese que, por el paso base, f es int. en $[d_n,b] \iff f$ es int en $[d_n,d_{n+1}]$ y en $[d_{n+1},b]$.

Por tanto, los siguientes enunciados son equivalentes:

(1) f es int en $[a,d_1], [d_1,d_2], \dots, [d_{n-1},d_n]$ y $[d_n,b]$

(2) f es int en $[a, d_1]$, $[d_1, d_2]$, $\ldots$, $[d_{n-1}, d_n]$,

en $[d_n, d_{n+1}]$. y en $[d_{n+1}, b]$.

(Si Q es equiv. a $R \wedge S$, ent. $P \wedge Q$ es equiv a $P \wedge (R \wedge S)$.)

$\therefore$ f es int en $[a, b]$ $\iff$ (2).

$\square$

Tarea 3.

Ej. 6 Si f y g son int, ent

$$(\text{máx}\{f,g\})(x) := \text{máx}\{f(x), g(x)\}.$$

Sabemos que si $a, b \in \mathbb{R}$

$$\text{máx}\{a,b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2}$$

$$\therefore \text{máx}\{f,g\} = \frac{f+g+|f-g|}{2}.$$

Si f y g son int, ent $\boxed{f-g \text{ es int}}$ y, por tanto, $\boxed{|f-g| \text{ es int.}}$

Ent $\boxed{f+g+|f-g|}$ es int y, finalmente

$$\frac{f+g+|f-g|}{2} = \text{máx}\{f,g\} \text{ es int.}$$

$\square$

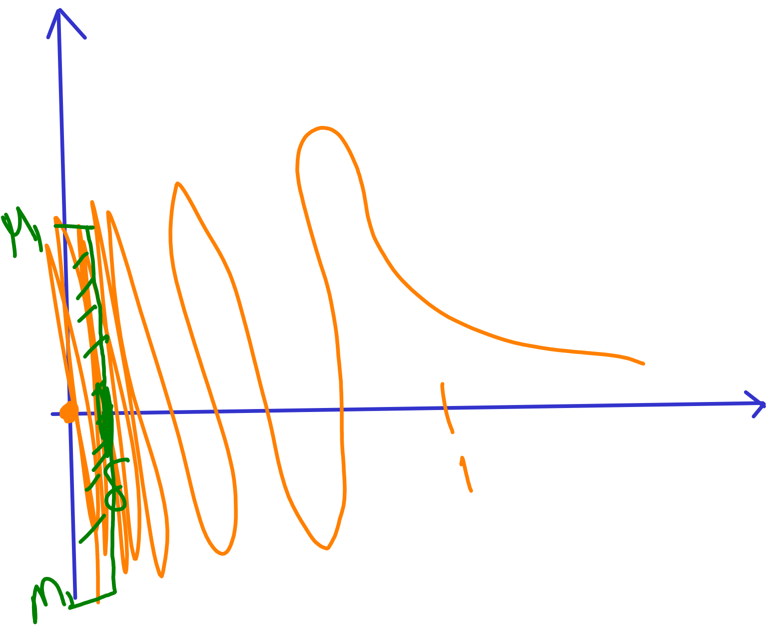
Tarea 2.

P.9. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{si } x \in (0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Demuestra que f es int en $[0,1]$.

Dems: Nótese que f es acotada en $[0,1]$.



Sea $\varepsilon > 0$ arbitraria.

Sea $\delta > 0$ t.q. $\delta < \frac{\varepsilon}{4}$.

Ent. $M_1 = \sup\{f(x) : x \in [0,\delta]\} = 1$

$m_1 = \inf\{f(x) : x \in [0,\delta]\}$

$= -1$

$$\therefore (M_1 - m_1)(\delta - 0) = \underline{2} \cdot \delta < \frac{\varepsilon}{2}$$

Luego, como $\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$ es cont. en $[\delta, 1]$, ent es integrable en $[\delta, 1]$ y, por tanto, Por criterio de Riemann existe $P \in P[\delta, 1]$ con $P = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ t.q. $x_1 = \delta$, $x_n = 1$ y $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. tal que

$$S(P, f|_{[\delta,1]}) - I(P, f|_{[\delta,1]}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $\tilde{P} := \{0 = x_0, \delta = x_1, \ldots, x_n = 1\}$

Ent

$$S(\tilde{P}, f) - I(\tilde{P}, f) =$$

$$(M_1 - m_1)\delta + S(P, f|_{[\delta,1]}) - I(P, f|_{[\delta,1]})$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \square$$