Universidad Nacional Autónoma de México **Facultad de Ciencias**

Análisis Matemático I 2024-1
Profra: Dra. Judith Campos Cordero

Tarea 1

1. Sea $X = (X, d)$ un espacio métrico. Prueba que, para cualesquiera $w, x, y, z \in X$, se cumple que

$$|d(w,x) - d(y,z)| \leq d(w,y) + d(x,z).$$

2. Sea (X, d) un espacio métrico. Determina cuáles de las siguientes funciones definidas en $X \times X$ son métricas para X.

a) $d^{(1)}(x,y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$;

b) $d^{(2)}(x,y) := \text{mín}\{1, d(x,y)\}$;

c) $d^{(3)}(x,y) := d(x,y)^2$.

Demuestra todas tus respuestas y, en caso de afirmar que alguna función sí es una métrica, asegúrate también de verificar que está bien definida.

3. Prueba que $\|x\|_\infty := \text{máx}\{|x_1|, ..., |x_n|\}$ donde $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, es una norma en $\mathbb{R}^n$.

4. ¿Es la función $\mu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dada por $\mu(x) := \text{mín}\{|x_1|, ..., |x_n|\}$, una norma en $\mathbb{R}^n$? Justifica tu afirmación.

5. Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Prueba que la función $d(v,w) := \|v - w\|$ es una métrica en V.

6. Describe los conjuntos $\widehat{B}_p(0,1) := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_p \leq 1\}$ para $p = 1, 2, \infty$. Haz un dibujo de cada uno de ellos.

7. Describe los conjuntos

$$\begin{aligned} \widehat{B}_{disc}(0,1) &: = \{x \in \mathbb{R}^2 : d_{disc}(x,0) \leq 1\}, \\ B_{disc}(0,1) &: = \{x \in \mathbb{R}^2 : d_{disc}(x,0) < 1\}, \end{aligned}$$

donde d_{disc} es la métrica discreta en $\mathbb{R}^2$.

8. Sea V un espacio vectorial distinto de $\{0\}$. Prueba que no existe ninguna norma en V que induzca la métrica discreta, es decir, no existe ninguna norma en V tal que

$$\|v - w\| = \begin{cases} 0 & \text{si } v = w, \\ 1 & \text{si } v \neq w. \end{cases}$$

9. Prueba que, para toda $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & \|x\|_r \leq \|x\|_s & \text{si } 1 \leq s \leq r \leq \infty, \\ \text{(b)} & \|x\|_s \leq n^{\frac{r-s}{sr}} \|x\|_r & \text{si } 1 \leq s \leq r < \infty, \\ \text{(c)} & \|x\|_s \leq n^{\frac{1}{s}} \|x\|_\infty & \text{si } 1 \leq s < \infty. \end{array}$$

(Sugerencia: Para probar la segunda desigualdad aplica la desigualdad de Hölder a los vectores $(1, ..., 1)$ *y* $(|x_1|^s, ..., |x_n|^s)$ *con* $p = \frac{r}{r-s}$ *y* $q = \frac{r}{s}$*).*

10. (a) Prueba que, si $1 \leq s < r \leq \infty$, entonces

$$\ell_s \subset \ell_r, \quad \ell_s \neq \ell_r \quad y \quad \|x\|_r \leq \|x\|_s \qquad \forall x \in \ell_s.$$

(b) Prueba además que, si $x \in \ell_p$ para alguna $1 \leq p < \infty$, entonces

$$\|x\|_\infty = \lim_{r\to\infty} \|x\|_r .$$

Sugerencia: Considera $x \in \ell_p$ fija. Sin perder generalidad, supongamos que $x \neq 0$. Después de argumentar porqué existe $\lim_{r\to\infty} \|x\|_r$, observa que, como $\frac{|x_k|}{\|x\|_\infty} \leq 1$, entonces para toda $r \geq p$,

$$\|x\|_r = \|x\|_\infty \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|^r}{\|x\|_\infty^r} \right)^{1/r} \leq \|x\|_\infty \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|^p}{\|x\|_\infty^p} \right)^{1/r}.$$

Observa que el extremo izquierdo de estas desigualdades sólo tiene a la variable r en el exponente $1/r$. De aquí es posible concluir el resultado.

11. Muestra que la desigualdad de Minkowski en $\mathbb{R}^n$ no se cumple si $p = \frac{1}{2}$.

12. Prueba que todo par de funciones continuas $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ satisfacen las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x) + g(x)|\, dx &\leq \int_a^b |f(x)|\, dx + \int_a^b |g(x)|\, dx, \\ \max_{x\in[a,b]} |f(x) + g(x)| &\leq \max_{x\in[a,b]} |f(x)| + \max_{x\in[a,b]} |g(x)| . \end{aligned}$$

13. Prueba que las desigualdades de Hölder para sumas, para series y para integrales siguen siendo válidas si $p = 1$ y $q = \infty$, es decir,
(a) Si $(x_1, ..., x_n)$, $(y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ entonces

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k| \right) \left(\max_{1\leq k\leq n} |y_k| \right).$$

(b) Si $(x_k) \in \ell_1$, $(y_k) \in \ell_\infty$ entonces $(x_k y_k) \in \ell_1$ y

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \right) \left(\sup_{k\in\mathbb{N}} |y_k| \right).$$

(c) Si $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ son funciones continuas, entonces

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|\, dx \right) \left(\max_{a\leq x\leq b} |g(x)| \right).$$

14. Da un ejemplo de una sucesión de funciones continuas $f_k : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tales que $\|f_k\|_1 = 1$ para toda $k \in \mathbb{N}$, y $\|f_k\|_\infty \to \infty$. Concluye que no existe ninguna constante $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|f\|_\infty \leq c \|f\|_1 \qquad \forall f \in C^0[0, 1].$$

¿Es posible construir una sucesión de funciones continuas $g_k : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tales que $\|g_k\|_\infty = 1$ para toda $k \in \mathbb{N}$, y $\|g_k\|_1 \to \infty$? Justifica tu respuesta.

15. Sea $C^r[a,b]$ el conjunto de las funciones $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ que son r-veces continuamente diferenciables en $[a,b]$, es decir, tales que todas sus derivadas $f',f'',...,f^{(r)}$ hasta la de orden r existen en (a,b) y son continuas en $[a,b]$. Para cada $p\in[1,\infty]$ definimos

$$\|f\|_{r,p} := \|f\|_p + \|f'\|_p + \cdots + \left\|f^{(r)}\right\|_p .$$

Prueba que $C^r_p[a,b] = (C^r[a,b], \|\cdot\|_{r,p})$ es un espacio vectorial normado.

16. Sean S un conjunto y $V=(V,\|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Prueba que $\mathcal{B}(S,V)$ es un espacio vectorial con las operaciones dadas por

$$(f+g)(z) := f(z)+g(z), \qquad (\lambda f)(z) := \lambda f(z),$$

$f,g\in\mathcal{B}(S,V)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, y que

$$\|f\|_\infty := \sup_{z\in S}\|f(z)\|$$

es una norma en $\mathcal{B}(S,V)$.

17. Sean $X=(X,d_X)$ y $Y=(Y,d_Y)$ espacios métricos. Consideremos el producto cartesiano

$$X\times Y := \{(x,y) : x\in X,\ y\in Y\}.$$

Dados $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in X\times Y$, definimos

$$\begin{aligned} d_p((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \ &: \ = \left(d_X(x_1,x_2)^p + d_Y(y_1,y_2)^p\right)^{1/p} \qquad \text{si } p\in[1,\infty), \\ d_\infty((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \ &: \ = \text{máx}\left\{d_X(x_1,x_2), d_Y(y_1,y_2)\right\}. \end{aligned}$$

(a) Prueba d_p es una métrica en $X\times Y$ para todo $p\in[1,\infty]$.
(b) Prueba que, para cualquiera de estas métricas y para cualquier $y_0\in Y$, la inclusión

$$\iota : X\to X\times Y, \qquad \iota(x) := (x,y_0)$$

es una isometría.
(c) ¿Es la proyección

$$\pi : X\times Y\to X, \qquad \pi(x,y) := x$$

una isometría?

18. Prueba que, si $\phi:X\to Y$ es una isometría y es biyectiva, entonces su inversa $\phi^{-1}:Y\to X$ es una isometría.

19. ¿Cuáles de las siguientes funciones son isometrías y cuáles no? Justifica tu afirmación.
(a) La identidad $\ id:\mathbb{R}^2_p\to\mathbb{R}^2_r,\ id(x)=x,\ $ con $p\neq r$.
(b) La identidad $\ id:C^0_p[0,1]\to C^0_r[0,1],\ id(f)=f,\ $ con $p\neq r$.
(c) La inclusión $\ \iota:C^1_2[0,1]\hookrightarrow C^0_2[0,1],\ \iota(f)=f$.
(d) La inclusión $\ \iota:C^0_\infty[0,1]\hookrightarrow \mathcal{B}([0,1],\mathbb{R}),\ \iota(f)=f$.
(e) La función $\ \phi:\mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})\to\ell_\infty,\ \phi(f)=(f(k))$.

20. Sea $X\subset\mathbb{R}^n$ y sean $x,y\in X$. Denotemos por $\mathcal{T}^1_{x,y}(X)$ al conjunto de todas las trayectorias $\alpha:[0,1]\to\mathbb{R}^n$ continuamente diferenciables por tramos tales que

$$\alpha(0)=x, \qquad \alpha(1)=y, \qquad \alpha(t)\in X\ \ \forall t\in[0,1].$$

Recordemos que α es continuamente diferenciable por tramos si existe una partición finita $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = 1$ del intervalo $[0, 1]$ tal que α es continuamente diferenciable en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, ..., m$. La longitud de α está dada por

$$\mathcal{L}(\alpha) := \int_0^1 \|\alpha'(t)\| \, dt.$$

Definimos

$$d(x, y) := \inf_{\alpha \in \mathcal{T}^1_{x,y}(X)} \mathcal{L}(\alpha).$$

Prueba que, si $\mathcal{T}^1_{x,y}(X) \neq \emptyset$ para todos $x, y \in X$, entonces d es una métrica en X.
¿En cuáles de los siguientes ejemplos coincide esta métrica con la inducida por la métrica usual de $\mathbb{R}^n$? Justifica tu afirmación.
(a) $X = \mathbb{R}^n$,
(b) $X = \mathbb{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$,
(c) $X = \mathbb{B}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$,
(d) $X = \{x \in \mathbb{B}^n : x \notin D\}$, donde $D := \{(x_1, ..., x_{n-1}, 0) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \leq \frac{1}{2}\}$.