Universidad Nacional Autónoma de México **Facultad de Ciencias**

Análisis Matemático I 2024-1
Profra: Dra. Judith Campos Cordero

Tarea 2

1. Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ y sean $x, y \in X$. Denotemos por $\mathcal{T}^1_{x,y}(X)$ al conjunto de todas las trayectorias $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciables por tramos tales que

$$\alpha(0) = x, \qquad \alpha(1) = y, \qquad \alpha(t) \in X \;\; \forall t \in [0,1].$$

Recordemos que α es continuamente diferenciable por tramos si existe una partición finita $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = 1$ del intervalo $[0,1]$ tal que α es continuamente diferenciable en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, ..., m$. La longitud de α está dada por

$$\mathcal{L}(\alpha) := \int_0^1 \|\alpha'(t)\| \, dt.$$

Definimos

$$d(x,y) := \inf_{\alpha \in \mathcal{T}^1_{x,y}(X)} \mathcal{L}(\alpha).$$

Prueba que, si $\mathcal{T}^1_{x,y}(X) \neq \emptyset$ para todos $x, y \in X$, entonces d es una métrica en X.
¿En cuáles de los siguientes ejemplos coincide esta métrica con la inducida por la métrica usual de $\mathbb{R}^n$? Justifica tu afirmación.
(a) $X = \mathbb{R}^n$,
(b) $X = \mathbb{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$,
(c) $X = \mathbb{B}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$,
(d) $X = \{x \in \mathbb{B}^n : x \notin D\}$, donde $D := \{(x_1, ..., x_{n-1}, 0) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \leq \frac{1}{2}\}$.

2. Sean $V = (V, \|\cdot\|_V)$ y $W = (W, \|\cdot\|_W)$ espacios vectoriales normados, y sea $L : V \to W$ una transformación lineal. Prueba que las siguientes afirmaciones son equivalentes.
(i) L es continua.
(ii) L es continua en 0.
(iii) Existe $c > 0$ tal que $\|Lv\|_W \leq c\,\|v\|_V$ para todo $v \in V$.
(iv) L es Lipschitz continua.

3. Sea X un espacio métrico. Prueba que, si $f, g : X \to \mathbb{R}$ son continuas, entonces las funciones

$$\begin{aligned} \max\{f,g\} \; &: \; X \to \mathbb{R}, \; (\max\{f,g\})(x) := \max\{f(x), g(x)\}, \\ \min\{f,g\} \; &: \; X \to \mathbb{R}, \; (\min\{f,g\})(x) := \min\{f(x), g(x)\}). \end{aligned}$$

son continuas.
¿Es cierto que, si $f, g : X \to \mathbb{R}$ son Lipschitz continuas, $\max\{f,g\}$ y $\min\{f,g\}$ son Lipschitz continuas?

4. Sea $g_0 \in C^0[a,b]$. Prueba que, para toda $p \in [1, \infty]$, la función $\phi : C^0_p[a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\phi(f) := \int_a^b f g_0$$

es Lipschitz continua. *(Sugerencia: Usa la desigualdad de Hölder para integrales.)*

5. Prueba que, para toda $p \in [1, \infty]$, la k**-ésima proyección**

$$\pi_k : \ell_p \to \mathbb{R}, \qquad \pi_k(x) = x_k,$$

con $x = (x_k) \in \ell_p$, es Lipschitz continua.

6. Demuestra las siguientes afirmaciones.
(a) Toda isometría es Lipschitz continua.
(b) Si $\phi : X \to Y$ y $\psi : Y \to Z$ son Lipschitz continuas entonces la composición $\psi \circ \phi : X \to Z$ es Lipschitz continua.
(c) Si $\phi : X \to Y$ es una equivalencia, entonces $\psi : Y \to Z$ es Lipschitz continua si y sólo si $\psi \circ \phi : X \to Z$ lo es.

7. ¿Cuáles de las siguientes funciones son Lipschitz continuas y cuáles son equivalencias Lipschitz?
(a) $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \ \phi(x) = x^2$.
(b) $\phi : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \ \ \phi(x) = \sqrt{x}$.
(c) $\phi : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \ \ \phi(x) = \arctan x$.

8. Dada $f \in C^1[0,1]$ definimos

$$\begin{aligned}
|||f|||_1 \ &: = \|f'\|_\infty \,, \\
|||f|||_2 \ &: = |f(0)| + \|f'\|_\infty \,, \\
|||f|||_3 \ &: = \text{máx}\left\{ \left| \int_0^1 f(x)dx \right|, \|f'\|_\infty \right\}, \\
|||f|||_4 \ &: = \left(\|f\|_2 + \|f'\|_2\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

(a) ¿Es $|||f|||_i$ una norma en $C^1[0,1]$? Responde esta pregunta para cada $i = 1, ..., 4$.
(b) Si $|||f|||_i$ es una norma, ¿es $|||f|||_i$ equivalente a la norma

$$\|f\|_{1,\infty} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty?$$

Justifica por qué $\|\cdot\|_{1,\infty}$ es una norma.
(c) Considera la función $D : C^1[0,1] \to C^0[0,1]$ que a cada función $f \in C^1[0,1]$ le asocia su derivada $f' \in C^0[0,1]$. Prueba que

$$D : (C^1[0,1], \|\cdot\|_{1,\infty}) \to C^0_\infty[0,1]$$

es continua.
(d) Para aquellas $|||\cdot|||_i$ que sí son normas investiga si

$$D : (C^1[0,1], |||\cdot|||_i) \to C^0_\infty[0,1]$$

es o no una función continua.

9. (a) Prueba que, para cualesquiera $1 \leq p \leq r \leq \infty$, la identidad $id : C^0_r[a,b] \to C^0_p[a,b]$ es Lipschitz continua.
(b) Prueba que $id : C^0_2[a,b] \to C^0_\infty[a,b]$ y $id : C^0_1[a,b] \to C^0_2[a,b]$ no son funciones continuas.

10. (a) Prueba que la sucesión de trayectorias $\alpha_k : [0,1] \to \mathbb{R}^2$,

$$\alpha_k(x) = (x, \frac{1}{k} sen(k\pi x)),$$

converge a la trayectoria $\alpha(x) = (x, 0)$ en $\mathcal{B}([0,1], \mathbb{R}^2)$.

(b) Sea $\mathcal{T}^1_{(0,0),(1,0)}(\mathbb{R}^2)$ el conjunto de todas las trayectorias $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ continuamente diferenciables por tramos tales que

$$\alpha(0) = (0,0), \qquad \alpha(1) = (1,0),$$

con la métrica inducida por la de $\mathcal{B}([0,1], \mathbb{R}^2)$. Prueba que la función longitud

$$\mathcal{L} : \mathcal{T}^1_{(0,0),(1,0)}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}, \qquad \mathcal{L}(\alpha) := \int_0^1 \|\alpha'(x)\| \, dx,$$

no es continua. *(Sugerencia: Usa el inciso anterior.)*

11. Sean $X = (X, d_X)$ y $Y = (Y, d_Y)$ espacios métricos.

(a) Prueba que todas las métricas del Ejercicio 17 de la Tarea 1 en el producto cartesiano $X \times Y := \{(x,y) : x \in X, \ y \in Y\}$ son equivalentes. En adelante $X \times Y$ denotará al producto cartesiano con cualquiera de estas métricas.

(b) Prueba que las proyecciones

$$\begin{aligned} \pi_X &: X \times Y \to X, \qquad \pi_X(x,y) = x, \\ \pi_Y &: X \times Y \to Y, \qquad \pi_Y(x,y) = y, \end{aligned}$$

son Lipschitz continuas.

12. Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Demuestra que las siguientes funciones son continuas.

$$\begin{array}{rcll} V \times V & \to & V, & (v,w) \mapsto v + w, \\ \mathbb{R} \times V & \to & V, & (\lambda, v) \mapsto \lambda v, \\ V & \to & \mathbb{R}, & v \mapsto \|v\|. \end{array}$$

13. Sean $X = (X, d)$ un espacio métrico y $x_0 \in X$. Prueba que la función

$$\phi : X \to \mathbb{R}, \qquad \phi(x) = d(x_0, x),$$

es Lipschitz continua. *(Sugerencia: Usa el Ejercicio 2 de la Tarea 1.)*

14. Sea $X = (X, d)$ un espacio métrico, sea $x_0 \in X$ y sea $r > 0$. Prueba que la esfera

$$S_X(x_0, r) := \{x \in X : d(x_0, x) = r\}$$

es un subconjunto cerrado de X. *(Sugerencia: Usa el Ejercicio* **??***)*

15. Sea $p \in [1, \infty]$. Demuestra las siguientes afirmaciones.

(a) U es abierto en $\mathbb{R}^n$ si y sólo si U es abierto en $\mathbb{R}^n_p$.

(b) C es cerrado en $\mathbb{R}^n$ si y sólo si C es cerrado en $\mathbb{R}^n_p$.

16. Da un ejemplo de un espacio métrico X junto con un subespacio métrico $Y \subseteq X$ y un subconjunto $A \subseteq Y$, tales que A es abierto en Y con la métrica heredada pero A no es abierto en X.

17. Sea $X = [-1, 1]$ con la métrica inducida por la de $\mathbb{R}$.
(a) Describe las bolas abiertas $B_X(1, \varepsilon)$ y $B_X(-1, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.
(b) ¿Cuál es el interior en X de los siguientes conjuntos?

$$(0, 1], \quad [0, 1], \quad (0, \frac{1}{2}), \quad [0, \frac{1}{2}), \quad [-1, 1].$$

Observa que el interior de estos conjuntos en X a veces no coincide con su interior en $\mathbb{R}$.
(c) ¿Cuáles de estos conjuntos son abiertos en X?
(d) ¿Cuáles de ellos son cerrados en X?

18. (a) ¿Es la bola abierta en $C^0_1[0, 1]$,

$$B_1(0, 1) := \{g \in C^0[0, 1] : \int_0^1 |g(x)|\, dx < 1\},$$

un subconjunto abierto de $C^0_\infty[0, 1]$?
(b) ¿Es la bola cerrada en $C^0_1[0, 1]$,

$$\widehat{B}_1(0, 1) := \{g \in C^0[0, 1] : \int_0^1 |g(x)|\, dx \leq 1\},$$

un subconjunto cerrado de $C^0_\infty[0, 1]$?
(c) ¿Es la bola cerrada en $C^0_\infty[0, 1]$,

$$\widehat{B}_\infty(0, 1) := \{g \in C^0[0, 1] : \max_{0 \leq x \leq 1} |g(x)| \leq 1\},$$

un subconjunto cerrado de $C^0_1[0, 1]$?
(d) Da un ejemplo de un subconjunto cerrado de $C^0_\infty[0, 1]$ que no sea cerrado en $C^0_1[0, 1]$.
(Sugerencia: Para responder a las dos primeras preguntas usa la caracterización de continuidad en términos de cómo actúa sobre conjuntos abiertos y cerrados.)

19. Prueba que la bola abierta en $C^0_\infty[0, 1]$,

$$B_\infty(0, 1) := \{g \in C^0[0, 1] : |g(t)| < 1 \ \forall t \in [0, 1]\},$$

tiene interior vacío en $C^0_1[0, 1]$.

20. Prueba que una sucesión (x_k) en un espacio métrico discreto X_{disc} converge a x si y sólo si existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_k = x$ para todo $k \geq k_0$.

21. Prueba que, si una sucesión (x_k) converge en X, entonces está acotada en X, es decir, existen $x_0 \in X$ y $r > 0$ tales que $d_X(x_k, x_0) < r$ para toda $k \in \mathbb{N}$.

22. (a) Prueba que en cualquier espacio métrico X la intersección de un número finito de subconjuntos abiertos $U_1 \cap \cdots \cap U_m$ es abierta en X.

(b) Da un ejemplo de una familia numerable de abiertos $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ en $\mathbb{R}$ cuya intersección $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ no es abierta en $\mathbb{R}$.

23. Demuestra que en cualquier espacio métrico $X = (X, d)$ se cumple lo siguiente.
(a) X es cerrado en X.
(b) El conjunto vacío $\emptyset$ es cerrado en X.
(c) La intersección $\bigcap_{i \in I} C_i$ de cualquier familia $\{C_i : i \in I\}$ de subconjuntos cerrados de X es cerrada en X.
(d) La unión $C \cup D$ de dos subconjuntos cerrados C y D de X es cerrada en X.

24. Sean A y B subconjuntos de un espacio métrico X. Demuestra las siguientes afirmaciones.
(a) $int(B) \subseteq int(A)$ si $B \subseteq A$.
(b) $int(A)$ es el máximo subconjunto abierto de X contenido en A.
(c) $\overline{B} \subseteq \overline{A}$ si $B \subseteq A$.
(d) $\overline{A}$ es el mínimo subconjunto cerrado de X que contiene a A.

25. Sea X un espacio métrico y sea Y un subespacio métrico de X. Sea $U_Y \subseteq Y$. Demuestra que U_Y es abierto en Y si y sólo si existe un conjunto $U \subseteq X$ tal que U es abierto en X y $U_Y = Y \cap U$.