Universidad Nacional Autónoma de México **Facultad de Ciencias**

Análisis Matemático I 2024-1
Profra: Dra. Judith Campos Cordero

Tarea 3

1. Prueba que una sucesión (x_k) en un espacio métrico discreto X_{disc} converge a x si y sólo si existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_k = x$ para todo $k \geq k_0$.

2. (a) Prueba que la sucesión de trayectorias $\alpha_k : [0,1] \to \mathbb{R}^2$,

$$\alpha_k(x) = \left(x, \frac{1}{k}\mathrm{sen}(k\pi x)\right),$$

converge a la trayectoria $\alpha(x) = (x, 0)$ en $\mathcal{B}([0,1], \mathbb{R}^2)$.

(b) Sea $\mathcal{T}^1_{(0,0),(1,0)}(\mathbb{R}^2)$ el conjunto de todas las trayectorias $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ continuamente diferenciables por tramos tales que

$$\alpha(0) = (0,0), \qquad \alpha(1) = (1,0),$$

con la métrica inducida por la de $\mathcal{B}([0,1], \mathbb{R}^2)$. Prueba que la función longitud

$$\mathcal{L} : \mathcal{T}^1_{(0,0),(1,0)}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}, \qquad \mathcal{L}(\alpha) := \int_0^1 \|\alpha'(x)\|\, dx,$$

no es continua. *(Sugerencia: Usa el inciso anterior.)*

3. Sea V un espacio vectorial normado y sea $S_V := \{x \in V : \|x\| = 1\}$ la esfera unitaria en V. En cada uno de los siguientes casos investiga si la esfera unitaria es o no compacta. Justifica tu afirmación.
(a) $V = \ell_p$ con $p \in [1, \infty]$.
(b) $V = C^0_p[0,1]$ con $p \in [1, \infty]$.

4. ¿Es cierto en general que, si $\phi : X \to Y$ es continua y K es un subconjunto compacto de Y, entonces $\phi^{-1}(K)$ es un subconjunto compacto de X? Justifica tu respuesta.

5. Prueba que, si $\phi : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces K es compacto en X si y sólo si $\phi(K)$ es compacto en Y.

6. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea $\{e_1, ..., e_n\}$ una base de V. Dado $v \in V$ lo expresamos como $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ y definimos

$$\|v\|_* := \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}.$$

Demuestra las siguientes afirmaciones:

a) $\|\cdot\|_*$ es una norma en V y, si le damos esta norma a V, la función $\phi : \mathbb{R}^n \to V$,

$$\phi(x_1, ..., x_n) := \sum_{i=1}^{n} x_i e_i,$$

es una isometría lineal y biyectiva.

b) Cualquier norma en V es equivalente a la norma $\|\cdot\|_*$. En consecuencia, cualesquiera dos normas en V son equivalentes.

c) Un subconjunto de V es compacto si y sólo si es cerrado y acotado en V.

7. Prueba que, si $\phi : X \to Y$ es continua y biyectiva y X es compacto, entonces $\phi^{-1} : Y \to X$ es continua (es decir, ϕ es un homeomorfismo).

8. Sea $\mathbb{S}^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ el círculo unitario en $\mathbb{R}^2$. Considera la función

$$f : [0, 2\pi) \to \mathbb{S}^1, \qquad f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t).$$

Prueba que
(a) f es continua y biyectiva,
(b) $f^{-1} : \mathbb{S}^1 \to [0, 2\pi)$ no es continua.
Es decir, la compacidad de X es esencial en la afirmación del ejercicio anterior.

9. Prueba que:
(a) La función $]\cdot[: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$]t[:= n \text{ si } n - 1 < t \leq n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

es s.c.i.
(b) La función parte entera $[\cdot] : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$[t] := n \text{ si } n \leq t < n + 1, \ n \in \mathbb{Z},$$

no es s.c.i.

10. Sea (t_k) una sucesión en $\mathbb{R}$. Demuestra las siguientes afirmaciones:

a) Se cumple la siguiente desigualdad:

$$\liminf_{k\to\infty} t_k \leq \limsup_{k\to\infty} t_k.$$

b) La sucesión (t_k) converge en $\mathbb{R}$ si y sólo si

$$\liminf_{k\to\infty} t_k = \limsup_{k\to\infty} t_k.$$

11. Prueba que son equivalentes las siguientes afirmaciones:
(a) f es s.c.i.
(b) $f_{>a} := \{x \in X : f(x) > a\}$ es abierto para toda $a \in \mathbb{R}$.
(c) $f^{\leq a} := \{x \in X : f(x) \leq a\}$ es cerrado para toda $a \in \mathbb{R}$.

12. Da un ejemplo de una trayectoria $\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ de longitud infinita.

13. Considera la sucesión de trayectorias $\sigma_k \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\sigma_k(t) = \begin{cases} 2^k t & \text{si } 0 \le t \le \frac{1}{2^k} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2^k} \le t \le 1. \end{cases}$$

Demuestra las siguientes afirmaciones:

a) Para todo $k \in \mathbb{N}$, σ_k es un mínimo de la función longitud $\mathfrak{L} \colon \mathcal{T}_{0,1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

b) (σ_k) no contiene ninguna subsucesión convergente en $\mathcal{C}^0[0,1]$. (Sugerencia: Prueba que para cualesquiera $j \neq k$, $\|\sigma_j - \sigma_k\|_\infty \ge \frac{1}{2}$).

c) Para todo $a \ge 1$, $\mathfrak{L}^{\le a}$ no es compacto en $\mathcal{C}^0[0,1]$.

d) $\mathfrak{L} \colon \mathcal{T}_{0,1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ no satisface las hipótesis del teorema de existencia de mínimos para funciones semicontinuas inferiormente.

14. Determina cuáles de las siguientes funciones f son continuas y si son uniformemente continuas:

a) $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = \frac{1}{t}$.

b) $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = \frac{1}{t}$, con $a > 0$.

c) Dados un espacio métrico (X,d) y un conjunto $\emptyset \neq A \subseteq X$, definimos la función *distancia al conjunto* A como $f \colon X \to \mathbb{R}$ con

$$f(x) = \operatorname{dist}(x,A) := \inf_{y \in A}\{d(x,y)\}.$$

15. Sean $\mathcal{K} : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas. Definimos $\widehat{f} : [a,b] \to \mathbb{R}$ como

$$\widehat{f}(x) := \int_a^b \mathcal{K}(x,y) f(y)\,dy.$$

Prueba que $\widehat{f}$ es continua. *(Sugerencia: Usa la continuidad uniforme de $\mathcal{K}$.)*