Universidad Nacional Autónoma de México **Facultad de Ciencias**

Análisis Matemático I 2024-1
Profra: Dra. Judith Campos Cordero

Tarea 4

1. Sea X_{disc} un espacio métrico discreto.
(a) Describe a las sucesiones de Cauchy en X_{disc}.
(b) ¿Es X_{disc} un espacio métrico completo?

2. Sea (x_k) una sucesión de Cauchy en un espacio métrico X.
(i) Prueba que (x_k) está acotada en X.
(ii) Prueba que, si alguna subsucesión de (x_k) converge a x en X, entonces (x_k) converge a x en X.

3. Sea $X = (0,1)$ con la métrica inducida por la de $\mathbb{R}$. Prueba que la sucesión $(\frac{1}{k})$ es de Cauchy en X pero no converge en X.

4. Considera la sucesión de funciones $f_k : [-1,1] \to \mathbb{R}$,

$$f_k(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \le x \le -\frac{1}{k}, \\ kx & \text{si } -\frac{1}{k} \le x \le \frac{1}{k}, \\ 1 & \text{si } \frac{1}{k} \le x \le 1. \end{cases}$$

(a) Prueba que (f_k) es de Cauchy en $C_p^0[-1,1]$ para toda $p \in [1,\infty)$.
(b) Prueba que (f_k) no converge en $C_p^0[-1,1]$ para ninguna $p \in [1,\infty]$. *(Sugerencia: Utiliza el caso $p = 1$ visto en clase).*
(c) ¿Es (f_k) de Cauchy en $C_\infty^0[-1,1]$?

5. Prueba que ℓ_p es un espacio de Banach para todo $p \in [1,\infty]$.

6. Considera los siguientes subespacios de ℓ_∞ con la norma inducida. ¿Cuáles de ellos son de Banach?
(i) $\mathfrak{d} := \{(x_n) : x_n \in \mathbb{R} \text{ y } x_n \neq 0 \text{ sólo para un número finito de } n\text{'s}\}$.
(ii) $\mathfrak{c}_0 := \{(x_n) : x_n \in \mathbb{R} \text{ y } x_n \to 0\}$.
(iii) $\mathfrak{c} := \{(x_n) : x_n \in \mathbb{R} \text{ y } (x_n) \text{ converge en } \mathbb{R}\}$.

7. Prueba que todo espacio métrico compacto es completo.

8. (a) Prueba que la sucesión de funciones $f_k(x) = x^k$ no converge uniformemente en $[0,1]$.
(b) Prueba que la sucesión de funciones $f_k(x) = x^k$ converge uniformemente en cualquier subintervalo cerrado $[a,b] \subset [0,1)$.

9. ¿Cuáles de las siguientes sucesiones de funciones $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convergen puntualmente en $\mathbb{R}$? Encuentra todos los intervalos donde la convergencia es uniforme.

$$\text{(a)} \quad f_k(x) = \frac{kx}{kx^2+1}; \qquad \text{(b)} \quad f_k(x) = \frac{kx}{k^2x^2+1}; \qquad \text{(c)} \quad f_k(x) = \frac{k^2x}{kx^2+1}.$$

10. ¿Cuáles de las siguientes sucesiones de funciones $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convergen uniformemente en $\mathbb{R}$? Encuentra el límite de tales sucesiones.

$$
\begin{array}{llcl}
\text{(a)} & f_k(x) & = & \begin{cases} |x-k|-1 & \text{si } \ x \in [k-1, k+1], \\ 0 & \text{si } \ x \notin [k-1, k+1]. \end{cases} \\
\text{(b)} & f_k(x) & = & \dfrac{1}{(x/k)^2+1}. \\
\text{(c)} & f_k(x) & = & sen(x/k). \\
\text{(d)} & f_k(x) & = & \begin{cases} \frac{1}{k} sen x & \text{si } \ x \in [2\pi k, 2\pi(k+1)], \\ 0 & \text{si } \ x \notin [2\pi k, 2\pi(k+1)]. \end{cases}
\end{array}
$$

11. Sean X un espacio métrico y $x, y \in X$. Denotamos por $\mathcal{T}_{x,y}(X)$ al subespacio métrico de $\mathcal{C}^0([0,1], X)$ definido como

$$\mathcal{T}_{x,y}(X) := \{\sigma \in \mathcal{C}^0([0,1], X) : \sigma(0) = x, \ \sigma(1) = y\}.$$

Prueba que, si X es completo, entonces $\mathcal{T}_{x,y}(X)$ es completo.

12. Prueba que, si $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $0 \leq a_n \leq b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

13. Considera la sucesión de funciones $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_k(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^k}.$$

(a) Prueba que, para cada $x \in \mathbb{R}$, la serie de números reales $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge.
(b) ¿Converge la serie de funciones $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ uniformemente en $\mathbb{R}$?

14. Considera la sucesión de funciones $f_k : [-1,1] \to \mathbb{R}$,

$$f_k(x) = \begin{cases} -x - \frac{1}{2k} & \text{si } -1 \leq x \leq -\frac{1}{k} \\ \frac{k}{2}x^2 & \text{si } -\frac{1}{k} \leq x \leq \frac{1}{k} \\ x - \frac{1}{2k} & \text{si } \frac{1}{k} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

a) Demuestra que para toda $k \in \mathbb{N}^+$ $f_k \in C^1([-1,1])$.

b) Demuestra que (f_k) converge uniformemente a la función $f(x) = |x|$. ¿Qué significa esto respecto al límite uniforme de una sucesión de funciones continuamente diferenciables?

15. Considera las funciones $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f_k(x) = \frac{\operatorname{sen} kx}{\sqrt{k}}.$$

(a) Prueba que (f_k) converge uniformemente a 0 en $\mathbb{R}$.
(b) Prueba que (f_k') no converge puntualmente en $\mathbb{R}$, donde f_k' es la derivada de f_k.

16. Prueba que, para cada $r \geq 1$, el espacio $C_\infty^r[a,b]$ es un espacio de Banach.

17. Sea $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$, $a_k \in \mathbb{R}$, una serie de potencias con radio de convergencia $R > 0$. Prueba que la función $f : (x_0 - R, x_0 + R) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$$

tiene derivadas de todos los órdenes y que la n-ésima derivada $f^{(n)}$ de f está dada por

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)a_k(x-x_0)^{k-n}, \qquad x \in (x_0 - R, x_0 + R).$$

En particular se cumple que $f^{(n)}(x_0) = n!a_n$.

18. Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(a) Prueba que f tiene derivadas de todos los órdenes en $x = 0$ y que $f^{(n)}(0) = 0$.
(b) ¿Se puede escribir f como una serie

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \qquad a_k \in \mathbb{R},$$

convergente en algún intervalo $(-R, R)$, $R > 0$?

19. Sean $a_{kj} \in \mathbb{R}$ tales que las series de números reales

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{kj}| = b_k$$

convergen para cada $k \in \mathbb{N}$ y la serie $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ también converge. Prueba que

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{kj}.$$

(Sugerencia: Considera el subespacio métrico $X := \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ de $\mathbb{R}$ y aplica el criterio de Weierstrass a la sucesión de funciones $f_k : X \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f_k\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}, \qquad f_k(0) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}.$$

Comprueba que esta sucesión satisface todas las hipótesis del Criterio de Weierstrass.)

20. Da el radio de convergencia de la serie de potencias

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

y calcula sus derivadas. ¿Quién es la función f?

21. Sea $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$\varphi(x) := \begin{cases} x \text{ si } x \in [0,1] \\ 2-x \text{ si } x \in [1,2] \end{cases}$$

y $\varphi(x+2) = \varphi(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Demuestra las siguientes afirmaciones:

a) La serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k \varphi(4^k x)$$

converge uniformemente en $\mathbb{R}$. En consecuencia, la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k \varphi(4^k x)$$

es continua.

b) Para todo $x \in \mathbb{R}$, f no es diferenciable en x. (*Sugerencia:* Para cada $j \in \mathbb{N}$, toma $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \leq 4^j x < m+1$ y define $y_j := 4^{-j}m$, $z_j := 4^{-j}(m+1)$). Prueba que

$$\left|\frac{f(z_j) - f(y_j)}{z_j - y_j}\right| \to \infty \qquad \text{cuando } j \to \infty.$$

Usa este hecho para concluir que f no es diferenciable en x.

22. (a) Prueba que la función $\phi : \mathbb{R}^n_p \to \mathbb{R}^n_p$ dada por $\phi(x) = \frac{1}{2}x$ es una contracción para todo $p \in [1, \infty)$.
(b) ¿Es posible darle a $\mathbb{R}^n$ alguna métrica tal que ϕ no sea contracción?
(c) ¿Es posible darle a $\mathbb{R}^n$ alguna norma tal que ϕ no sea contracción?

23. (a) Usa el teorema del valor intermedio para probar que toda función continua $f : [a,b] \to [a,b]$ tiene al menos un punto fijo.
(b) Da un ejemplo de una función continua $f : [a,b] \to [a,b]$ con una infinidad de puntos fijos.

24. Da un ejemplo de un espacio métrico completo y una función $\phi : X \to X$ que satisface

$$d(\phi(x), \phi(y)) < d(x,y) \qquad \forall x, y \in X \text{ con } x \neq y, \tag{1}$$

y que no tiene ningún punto fijo. Es decir, la condición *(1)* no es suficiente para garantizar la existencia de un punto fijo.

25. Prueba que, si X es un espacio métrico compacto y $\phi : X \to X$ satisface

$$d_X(\phi(x), \phi(y)) < d_X(x,y) \qquad \forall x, y \in X \ \text{ con } x \neq y,$$

entonces ϕ tiene un único punto fijo.

26. Sea $\chi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\chi(t,x) = 3x^{2/3}$.
(a) Prueba que χ no es localmente Lipschitz en la segunda variable.
(b) Prueba que, para todas $\alpha < 0 < \beta$, la función

$$u_{\alpha,\beta}(t) := \begin{cases} (t-\alpha)^3 & \text{si } t \leq \alpha, \\ 0 & \text{si } \alpha \leq t \leq \beta, \\ (t-\beta)^3 & \text{si } t \geq \beta, \end{cases}$$

es solución del problema de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} u' = 3u^{2/3}, \\ u(0) = 0. \end{array} \right.$$

En consecuencia, si χ no es localmente Lipschitz en la segunda variable, el problema de Cauchy puede tener una infinidad de soluciones.

27. Sea $\chi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\chi(t, x) = -x^2$.
(a) Prueba que χ es localmente Lipschitz en la segunda variable.
(b) Para $\alpha \neq 0$ considera el problema de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} u' = -u^2, \\ u(0) = -\frac{1}{\alpha}. \end{array} \right. \tag{2}$$

Prueba que

$$u(t) = \frac{1}{t - \alpha}$$

es solución de *(2)* en algún intervalo que contiene a 0.
(c) ¿Cuál es el intervalo máximo para el que existe una solución de *(2)*?