Universidad Nacional Autónoma de México **Facultad de Ciencias**

Análisis Matemático I 2024-1
Profra: Dra. Judith Campos Cordero

Tarea 5

1. Sea $A \subseteq X$. Determina cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas:

a) Si A es acotado, entonces A es totalmente acotado.

b) Si A es totalmente acotado, entonces A es compacto.

c) Si A es totalmente acotado, entonces A es relativamente compacto en X.

d) Si A es relativamente compacto en X, entonces A es totalmente acotado.

e) Si X es compacto, entonces A es relativamente compacto en X.

2. (a) Prueba que, si $\phi : X \to Y$ es uniformemente continua y A es un subconjunto totalmente acotado de X, entonces $\phi(A)$ es totalmente acotado en Y.
(b) ¿Es cierto que, si $\phi : X \to Y$ es continua y A es totalmente acotado en X, entonces $\phi(A)$ es totalmente acotado en Y? Demuestra tu afirmación.

3. Prueba que los subconjuntos totalmente acotados de $\mathbb{R}^n$ son precisamente los conjuntos acotados.

4. Sea X un espacio de Banach y sea $S_X := \{x \in X : \|x\| = 1\}$ la esfera unitaria en X. En cada uno de los siguientes casos investiga si la esfera unitaria es o no totalmente acotada. Demuestra tu afirmación.
(a) $X = \ell_2$.
(b) $X = \ell_\infty$.
(c) $X = \mathcal{C}^0[0,1]$.
(d) $X = C_1^0[0,1]$.

5. El cubo de Hilbert se define como el conjunto

$$\mathcal{Q} := \left\{ (x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_2 : |x_k| \leq \frac{1}{2^{k-1}} \right\}.$$

a) Demuestra que $\mathcal{Q}$ es cerrado en ℓ_2.

b) Demuestra que $\mathcal{Q}$ es totalmente acotado.
Sugerencia: Muestra que, para cada $k_0 \in \mathbb{N}^+$, el conjunto $\mathcal{Q}^{k_0} := \{(x_k) \in \mathcal{Q} : \forall k > k_0 (x_k = 0)\}$ es compacto. Dado $x = (x_k) \in \mathcal{Q}$, define $x^{k_0} := (x_1, x_2, ..., x_{k_0}, 0, 0, ...) \in \mathcal{Q}^{k_0}$. Muestra que $\|x - x^{k_0}\|_2 < \frac{1}{2^{k_0-1}}$.
Concluye que $\mathcal{Q}$ es compacto.

6. Prueba que el conjunto $\mathcal{H} = \{f_k : [-1,1] \to \mathbb{R} : k \in \mathbb{N}\}$ de las funciones continuas

$$f_k(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq x \leq -\frac{1}{k} \\ kx & \text{si } -\frac{1}{k} \leq x \leq \frac{1}{k} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{k} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

no es equicontinuo en 0.

7. Sea $f_k\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida como $f_k(x) := \operatorname{sen}(\sqrt{t + 4\pi^2 k^2})$. Demuestra las siguientes afirmaciones:

a) El conjunto $\mathcal{H} := \{f_k : k \in \mathbb{N}\}$ es equicontinuo.

b) El conjunto $\mathcal{H}(t)$ es relativamente compacto en $\mathbb{R}$ para cada $t \in [0,\infty)$.
Sugerencia: Muestra que la sucesión (f_k) converge puntualmente a 0 en $[0,\infty)$.

c) $\mathcal{H}$ no es un subconjunto compacto de $\mathcal{C}^0_b([0,\infty),\mathbb{R})$.
Sugerencia: Muestra que la sucesión (f_k) no converge uniformemente en $[0,\infty)$.

8. Sean K un espacio métrico compacto, X un espacio métrico y (f_k) una sucesión en $\mathcal{C}^0(K,X)$ que converge *puntualmente a una función* $f : K \to X$, es decir, $f_k(x) \to f(x)$ en $\mathbb{R}$ para cada $x \in K$. Prueba que, si $\mathcal{H} := \{f_k : k \in \mathbb{N}\}$ es equicontinuo, entonces f es continua y $f_k \to f$ en $\mathcal{C}^0(K,X)$.

9. Prueba que, si K y X son espacios métricos compactos, entonces un subconjunto $\mathcal{H}$ de $\mathcal{C}^0(K,X)$ es relativamente compacto en $\mathcal{C}^0(K,X)$ si y sólo si es equicontinuo.

10. Sea $\rho : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ una función continua, no decreciente y suprayectiva. Prueba que, para toda $\sigma \in \mathcal{C}^0([a,b],X)$ se cumple que

$$\mathcal{L}(\sigma \circ \rho) = \mathcal{L}(\sigma).$$

11. Prueba que si $a < b < c$, entonces para toda $\sigma \in \mathcal{C}^0([a,c],X)$ se cumple que

$$\mathcal{L}(\sigma) = \mathcal{L}(\sigma|_{[a,b]}) + \mathcal{L}(\sigma|_{[b,c]}).$$

12. Sean X un espacio métrico y $x \in X$. Prueba que el espacio de trayectorias de x a x, definido como el conjunto

$$\mathcal{T}_x(X) := \left\{\sigma \in \mathcal{C}^0([0,1],X) : \sigma(0) = \sigma(1) = x\right\},$$

es relativamente compacto en $\mathcal{C}^0([0,1],X)$ si y sólo si la única trayectoria de x a x en X es la trayectoria constante.

13. Sea X un espacio métrico. Demuestra que si $Z \subseteq Y \subseteq X$ y Z es denso en X, entonces Y es denso en X.

14. Prueba que si $\phi : X \to Y$ es continua, suprayectiva y A es denso en X, entonces $\phi(A)$ es denso en Y.

15. Prueba que el conjunto $\mathbb{Q}^n := \{(q_1,q_2,...,q_n) \in \mathbb{R}^n : \forall i \in \{1,...,n\} q_i \in \mathbb{Q}\}$ es denso en $\mathbb{R}^n$.

16. Sea $\mathbb{Q}^\infty$ el conjunto de todas las sucesiones con entradas racionales para las cuales sólo una cantidad finita de entradas son distintas de cero, es decir, sucesiones de la forma $(q_1,q_2,...,q_k,0,0,...)$ con $k \in \mathbb{N}$ y $q_1,...,q_k \in \mathbb{Q}$.

a) Demuestra que $\mathbb{Q}^\infty$ es denso en ℓ_p para todo $p \in [1,\infty)$.

b) ¿Es $\mathbb{Q}^\infty$? denso en ℓ_∞?

17. Sea $\mathbb{Q}[t]$ el conjunto de todos los polinomios de la forma

$$q_0 + q_1 t + ... + q_n t^n$$

con $n \in \mathbb{N}$ y $q_0, ..., q_n \in \mathbb{Q}$.

Demuestra que

$$\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}[a,b] := \left\{ q|_{[a,b]} : q \in \mathbb{Q}[t] \right\}$$

es denso en $\mathcal{C}^0[a,b]$.

18. Se dice que un conjunto A es **a lo más numerable** si existe una función inyectiva $i\colon A \to \mathbb{N}$. Demuestra las siguientes afirmaciones:

a) $\mathbb{Q}$ es a lo más numerable.

b) El conjunto de todas las sucesiones (b_k) tales que para toda $k \in \mathbb{N}$ $b_k \in \{0,1\}$ no es a lo más numerable.

c) $\mathbb{R}$ no es a lo más numerable. *Sugerencia:* Usa el hecho de que todo número real tiene una representación binaria.

19. Un espacio métrico X se llama **separable** si contiene un subconjunto a lo más numerable que es denso en X. Demuestra las siguientes afirmaciones:

a) Ningún subconjunto propio de un espacio métrico discreto X_{disc} es denso en X_{disc}.

b) Un espacio métrico discreto X_{disc} es separable si y sólo si X_{disc} es a lo más numerable.

20. Determina si los siguientes espacios métricos son o no son separables. Demuestra tus respuestas.

a) $\mathbb{R}^n_p$ con $p \in [1, \infty]$;

b) ℓ_p con $p \in [1, \infty]$;

c) $\mathcal{C}^0_p[a,b]$ con $p \in [1, \infty]$;

d) $\mathcal{C}^0_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

21. Demuestra que todo espacio métrico compacto es separable.
Sugerencia: Para cada $k \in \mathbb{N}^+$, toma un conjunto finito de bolas de radio $\frac{1}{k}$ cuya unión sea X. Considera el conjunto de centros de todas esas bolas.

22. Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$. Denotemos por $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ al conjunto de todas las funciones $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ que tienen derivadas parciales de todos los órdenes en Ω y dichas derivadas tienen una extensión continua a $\overline{\Omega}$. Demuestra que $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ es denso en $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$.
Sugerencia: Utiliza el corolario al Teorema de Stone-Weierstrass y el Ejercicio **??**

23. Sea $f \in \mathcal{C}^0[0,1]$ tal que, para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 f(x)x^n \, \mathrm{d}x = 0.$$

Demuestra que

$$\int_0^1 f^2(x) \, \mathrm{d}x = 0$$

y concluye que $f \equiv 0$ en $[0,1]$.

24. Sea $\mathbb{S}^1 := \{(\cos\theta, \sin\theta) \in \mathbb{R}^2 : \theta \in [0, 2\pi]\}$ la circunferencia unitaria en $\mathbb{R}^2$. Demuestra que cualquier función continua $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ es el límite uniforme de funciones de la forma

$$\varphi(\cos\theta, \sin\theta) = a_0 + a_1 \cos\theta + b_1 \sin\theta + ... + a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)$$

con $n \in \mathbb{N}$ y $a_i, b_i \in \mathbb{R}$.